Énigme policière : Travail sur la logique en mathématiques

Étape 1. Chacune des 4 affirmations de l'énigme policière est énoncée sous la forme "si A, alors B" : **Ce sont des implications**.
En mathématiques, l'implication "si A, alors B" est notée "$A \Rightarrow B$".
Dans l'implication $A \Rightarrow B$, A est appelé "antécédent", B est appelé "conséquent".

Étape 2. Les 4 implications de l'énoncé sont vraies (on en fait l'hypothèse au départ), **que la première partie ou la seconde en soit vraie ou non** : savoir que l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie ne renseigne pas (en général) sur la valeur de vérité de A ou de B.
Par exemple la phrase "si Alice n'est pas coupable alors Charlie est coupable" est vraie alors qu'Alice est coupable.

Étape 3. On peut utiliser plusieurs implications à la suite : Si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$, alors l'implication $A \Rightarrow C$ est vraie elle aussi. On dit qu'il y a **transitivité** de l'implication.

Étape 4. Une implication peut être vraie ou fausse. Elle est fausse seulement dans le cas où A est vraie et B est fausse.
Un cas particulier est intéressant : si l'implication $\rceil A \Rightarrow A$ est vraie, alors si $\rceil A$ est vraie, A l'est aussi. Comme elles ne sont pas vraies simultanément (principe du tiers exclu), c'est que $\rceil A$ est fausse et A est vraie.

Étape 5. Quelques exemples :

Exemple I.1. Pour tout triangle ABC, si le triangle ABC est rectangle en B, alors

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Exemple I.2. Pour tout quadrilatère $ABCD$, si le quadrilatère $ABCD$ est un losange, alors les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Exemple I.3. Pour tout nombre réel x, si $x^2 \geq 4$ alors $x \geq 2$.

Exemple I.4. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, si f est une fonction affine, alors $f(0) \neq 0$.

Étape 6. Dans les raisonnements mathématiques (qui mettent en œuvre des implications appelées "propriétés", "théorèmes", etc), on utilise le principe suivant en 3 points :

$$A \Rightarrow B, \quad \text{or A}, \quad \text{donc B}.$$

La mise en forme de ce principe est souvent la suivante :
On sait que A ; on applique le théorème $A \Rightarrow B$; on en déduit B.

Étape 7. Il est aussi très fréquent d'utiliser, dans un raisonnement, une implication d'une autre manière :

$$A \Rightarrow B, \quad \text{or } \rceil \text{B}, \quad \text{donc } \rceil \text{A}.$$

Cela signifie que lorsque $A \Rightarrow B$, alors $\rceil B \Rightarrow \rceil A$.
Cette nouvelle implication est appelée **contraposée** de l'implication $A \Rightarrow B$.

Une implication et sa contraposée sont ou bien vraies simultanément, ou bien fausses simultanément.

Étape 8. Les implications $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ ne sont pas nécessairement ou bien vraies simultanément ou bien fausses simultanément.

L'implication $B \Rightarrow A$ est appelée **réciproque** de l'implication $A \Rightarrow B$.

Étape 9. Ne pas confondre contraposée et réciproque.

Étape 10. Lorsque l'implication $A \Rightarrow B$ et sa réciproque $B \Rightarrow A$ sont vraies, on dit que A et B sont **équivalents**, et on le note : $A \Leftrightarrow B$.

Étape 11. Diverses formulations d'une implication : dans un texte, l'implication $A \Rightarrow B$ peut se trouver sous les formes suivantes :

- si A alors B
- B si A
- A seulement si B
- A est une condition suffisante pour B
- B est une condition nécessaire pour A