Énigme policière : Fiche professeur

1 Rappel de l'énigme

On suspecte Alice, Bob et Charlie d'avoir commis un meurtre.
Les premières investigations ont montré que :

- Si Charlie n'est pas coupable, alors Bob est coupable ;
- Si Alice n'est pas coupable, alors Charlie est coupable ;
- Si Alice est coupable, alors Bob ne l'est pas ;
- Si Charlie est coupable, alors Alice l'est aussi ;

Qui est coupable ? Qui est innocent ?
Rédigez un argumentaire le plus convaincant possible.

2 Scénario possible

1. **Résolution de l'énigme policière** (fiche élève n$^{\text{o}}$ 1)
   - Travail en groupes (*25 minutes*) : les élèves doivent mettre au point un argumentaire convaincant ; chaque groupe désigne un rapporteur qui devra exposer le point de vue du groupe en temps limité (*2 minutes*). Cette contrainte renforce l'aspect synthétique des présentations et fait prendre conscience de la recherche d'efficacité.
   - Mise en commun (*15 minutes*) : quelques présentations d'élèves (retenues de manière à éviter les redondances) sont débattues.
   - Synthèse et correction (*15 minutes*) : il s'agit de converger vers les arguments les plus rigoureux permettant de désigner les coupables ; la correction montre l'efficacité d'une bonne utilisation des règles de la logique.
2. **Prolongement par le travail sur l'implication** (fiche élève n$^{\text{o}}$ 2)
   En classe entière, *une heure environ.*
   Le professeur expose les différentes remarques ; celles-ci sont illustrées par des questions proposées aux élèves. La seconde fiche élève est distribuée comme synthèse de ce travail.
   Le travail proposé ci-dessous va largement au-delà des questions posées dans les fiches élève. La partie suivant la résolution de l'énigme nécessite au moins une séance de travaux dirigés pour illustrer la série de remarques par des exemples pertinents.

3 Éléments de solution

3.1 Formalisation de l'énigme

En désignant par A (respectivement B, C), les affirmations Alice est coupable (resp. Bob, Charlie), les quatre affirmations s'écrivent :

[1] $\rceil C \Rightarrow B$ [2] $\rceil A \Rightarrow C$ [3] $A \Rightarrow \rceil B$ [4] $C \Rightarrow A$

3.2 Solution un peu formalisée

On part du principe suivant : toute personne est soit innocente, soit coupable (principe du tiers exclu).

Étape 1. $\rceil A \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow A$, donc $\rceil A \Rightarrow A$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\rceil A$ qui est donc fausse. Ainsi A est vraie et Alice est coupable.

Étape 2. Comme $A \Rightarrow \rceil B$ et qu'on a montré A, on en déduit $\rceil B$. Bob est donc innocent.

Étape 3. Comme $\rceil C \Rightarrow B$ et qu'on a montré $\rceil B$, on en déduit C. Charlie est donc coupable.

Conclusion : Alice et Charlie sont coupables, Bob est innocent.

L'efficacité et la clarté de cet argumentaire sont impressionnantes pour les élèves, y compris pour ceux ayant résolu l'énigme correctement.

4 Procédures et solutions des élèves

Plusieurs méthodes de résolution sont accessibles :

- Travail par implication avec plusieurs degrés de formalisation ;
- Démonstration par exhaustion des cas.

Quelle que soit la méthode, plusieurs étapes sont nécessaires :

- Mise au point d'une schématisation des 4 affirmations de l'énigme ;
- Savoir ce qu'est une assertion vraie ;
- Mise au point d'un argumentaire ;
- Réflexion sur la notion de preuve.

Les solutions proposées par les élèves s'avèrent parfois partiellement ou totalement incorrectes :

- Argumentation sur les implications, du même type que celle-ci-dessus, mais moins formalisée. le recours à la contraposée est souvent invoqué ;
- Argumentations très brouillonnes paraphrasant le texte ; ces argumentations ne sont pas retenues comme convaincantes lors du débat ;
- Schématisations (flèches) souvent erronées ;
- Arguments reposant sur la fréquence des prénoms évoqués dans les indices ;
- Un travail par exhaustion des cas, pourtant efficace (si un dénombrement des cas possibles est fait), est exceptionnel.

5 Travail sur la logique en mathématiques

À la suite de la résolution de l' énigme, un travail sur l' implication et sur la logique sont à faire avec la classe. En voici les principales étapes.

Étape 1. Chacune des 4 affirmations est énoncée sous la forme "si A, alors B" :
Ce sont des implications.
En mathématiques, l'implication "si A, alors B" est notée "$A \Rightarrow B$".
Dans l'implication $A \Rightarrow B$, A est appelé "antécédent", B est appelé "conséquent".

Étape 2. Les 4 implications de l'énoncé sont vraies (on en fait l'hypothèse au départ), **que la première partie ou la seconde en soit vraie ou non** : savoir que l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie ne renseigne pas (en général) sur la valeur de vérité de A ou de B.
Par exemple la phrase "si Alice n'est pas coupable alors Charlie est coupable" est vraie alors qu'Alice est coupable.

Étape 3. On peut utiliser plusieurs implications à la suite : Si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$, alors l'implication $A \Rightarrow C$ est vraie elle aussi. On dit qu'il y a **transitivité** de l'implication.

Ce principe a été utilisé dans l'étape 1 de la résolution : Si Alice n'est pas coupable, alors Charlie est coupable, mais si Charlie est coupable,alors Alice est coupable. Cela signifie que si Alice n'est pas coupable, alors Alice est coupable.

Étape 4. Une implication peut être vraie ou fausse. Elle est fausse seulement dans le cas où A est vraie et B est fausse.
Un cas particulier est intéressant : si l'implication $\rceil A \Rightarrow A$ est vraie, alors si $\rceil A$ est vraie, A l'est aussi. Comme elles ne sont pas vraies simultanément (principe du tiers exclu), c'est que $\rceil A$ est fausse et A est vraie. Ce principe a aussi été utilisé dans l'étape 1 de la résolution.

Étape 5. Quelques exemples d'implications vraies et d'implications fausses en mathématiques.
Les exemples donnés par les élèves manquent parfois de pertinence : ce sont soit des définitions ("si un triangle a deux côtés égaux, alors il est isocèle"), soit des axiomes, soit des théorèmes bancals ou faux, soit des théorèmes inventés ("si on élève un nombre au carré, alors le résultat est positif"), et qui constituent des outils souvent peu utiles.
Lorsqu'on demande aux élèves de se limiter à des énoncés simples de collège, on se heurte à une méconnaissance des propriétés des quadrilatères particuliers, ce qui montre que ce n'est pas le terrain de jeu idéal. Par exemple, on trouve des propriétés du type "si un parallélogramme a 4 angles droits, alors c'est un rectangle", propriété certes juste, mais encore une fois peu utile.
Sans doute faut-il être ici un peu plus interventionniste au point d'imposer finalement le choix de quelques implications simples données (ou non) par les élèves : une vraie dont la réciproque est vraie, une vraie dont la réciproque est fausse, une fausse dont la réciproque est vraie, une dernière fausse dont la réciproque est fausse.
Ces exemples serviront ensuite à illustrer les autres étapes du travail.

Quelques exemples :

Exemple I.1. Pour tout triangle ABC, si le triangle ABC est rectangle en B, alors

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Exemple I.2. Pour tout quadrilatère $ABCD$, si le quadrilatère $ABCD$ est un losange, alors les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Exemple I.3. Pour tout nombre réel x, si $x^2 \geq 4$ alors $x \geq 2$.

Exemple I.4. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, si f est une fonction affine, alors $f(0) \neq 0$.

Leur formulation rigoureuse est assez laborieuse en raison de la quantification, mais doit être soignée si on veut travailler sur leur réciproque.
La fausseté de I.4 n'est pas évidente pour beaucoup d'élèves de lycée, à tel point que I.4 est parfois proposée spontanément comme implication juste.
Le travail sur les implications fausses (universellement quantifiées) permet d'évoquer la notion de contre-exemple, en réinvestissant un vrai-faux travaillé récemment si possible. Cette formalisation du contre-exemple est très appréciée des élèves, qui pensent la notion acquise mais ne sont pas capables de la mettre en œuvre efficacement ou de la formuler de manière générale.

Voici un exemple d'assertion fausse, intéressante en début d'année de Terminale :

Exemple I.5. Pour toutes suites (u_n) et (v_n), si $\lim u_n = \infty$ et $\lim v_n = -\infty$, alors

$$\lim(u_n + v_n) = 0.$$

Étape 6. Dans les raisonnements mathématiques (qui mettent en œuvre des implications appelées "propriétés", "théorèmes", etc), on utilise le principe suivant en 3 points :

$$A \Rightarrow B, \quad \text{or A}, \quad \text{donc B.}$$

Ce principe est appelé *modus ponens*. La mise en forme du modus ponens est souvent la suivante :
On sait que A ; on applique le théorème $A \Rightarrow B$; on en déduit B.

Donner un exemple d'une telle mise en forme. On réutilise pour cela les implications I.1 et I.2 données ci-dessus.

On pourra comparer avec le syllogisme en philosophie, grâce à l'exemple :
"Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel".
On peut évoquer les problèmes langagiers de la formulation de l'implication universellement quantifiée mais implicite de "Tous les hommes sont mortels". Grand étonnement des élèves qui découvrent un lien fort entre les mathématiques et une discipline "non scientifique" !

Étape 7. Il est aussi très fréquent d'utiliser, dans un raisonnement, une implication d'une autre manière :

$$A \Rightarrow B, \quad \text{or } \rceil\text{B}, \quad \text{donc } \rceil\text{A}.$$

Cela signifie que lorsque $A \Rightarrow B$, alors $\rceil B \Rightarrow \rceil A$.
Cette nouvelle implication est appelée **contraposée** de l'implication $A \Rightarrow B$.
Par exemple, l'étape 3 de la résolution de l'énigme fait appel à la contraposée.

Ce type de raisonnement est appelée*modus tollens*.

Énoncer la contraposée des implications déjà évoquées ; dire pour chacune si elle est vraie ou fausse. On réutilise les implications I.1, I.2 et I.4, puis on fait le bilan avec la remarque suivante :
Une implication et sa contraposée sont ou bien vraies simultanément, ou bien fausses simultanément.

Étape 8. Les implications $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ ne sont pas nécessairement ou bien vraies simultanément ou bien fausses simultanément.
Reprendre au moins les exemples I.2 et I.3 : en donner les réciproques et comparer la véracité de chacune des implications de départ avec sa réciproque.
L'implication $B \Rightarrow A$ est appelée **réciproque** de l'implication $A \Rightarrow B$.

Étape 9. Ne pas confondre contraposée et réciproque.
On le constate sur les exemples dont on a déjà donné la réciproque et la contraposée, tant sur l'écriture de ces deux implications que sur leur véracité.

Étape 10. Lorsque l'implication $A \Rightarrow B$ et sa réciproque $B \Rightarrow A$ sont vraies, on dit que A et B sont **équivalents**, et on le note : $A \Leftrightarrow B$.

Observer l'équivalence pour l'exemple I.1 et demander aux élèves d'énoncer des équivalences dans les cadres des exemples I.2 et I.3.

Étape 11. Diverses formulations d'une implication : dans un texte, l'implication $A \Rightarrow B$ peut se trouver sous les formes suivantes :

- si A alors B
- B si A
- A seulement si B
- A est une condition suffisante pour B
- B est une condition nécessaire pour A

Il faut illustrer ces formulations par quelques exemples pertinents, en particulier de "A seulement si B" , rencontrée fréquemment dans la locution "si et seulement si", mais rarement rencontrée seule.
Un exemple riche se trouve dans la démonstration de la propriété suivante :

Exemple I.6. Le produit de deux nombres entiers est impair si et seulement si ces deux nombres sont impairs.

La démonstration peut se faire par disjonction des cas et c'est une bonne occasion d'insister sur le **si** (le produit est impair dans le cas o les deux nombres sont impairs) et sur le **seulement si** (il n'y a pas d'autre cas dans lesquels le produit est impair).
La contraposée d'une des implications de cette équivalence permet de démontrer que pour tout entier n, si n^2 est pair, alors n est pair.