

16. Fractions continues, approximation des réels par des rationnels et statistiques

Proposé par : *Alain Bruquières*

Une *fraction continue* est une écriture de la forme

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 \dots}}}$$

où a_0 est un entier relatif et les a_i sont des entiers ≥ 1 pour $i \geq 1$. On montre que tout nombre réel irrationnel x s'écrit de manière unique sous forme de fraction continue.

Pour citer l'exemple le plus simple, le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ s'écrit sous forme de fraction continue :

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 \dots}}$$

Un nombre rationnel $x = \frac{n}{d}$ s'écrit lui aussi comme une fraction similaire, mais cette fois avec un nombre fini de coefficients, et cette écriture se déduit très simplement de l'algorithme d'Euclide appliqué au calcul du p. g. c. d. de n et de d .

L'écriture d'un nombre comme fraction continue renseigne sur la meilleure manière (en un sens à définir) d'approcher ce nombre par des rationnels, ce qui explique par exemple comment se répartissent les années bissextiles, ou en quel sens $22/7$ et $255/113$ sont de bonnes approximations de π , ou encore pourquoi le nombre d'or est le nombre réel le plus difficile à approcher par des rationnels.

Les statistiques s'en mêlent lorsque l'on regarde comment se répartissent les coefficients $a_1, a_2, a_3 \dots$ du développement en fraction continue d'un nombre réel x pris au hasard. Un mathématicien Russe nommé Alexandre Khintchine a démontré le résultat très surprenant suivant : la moyenne géométrique des coefficients du développement en fraction continue d'un réel est presque toujours égale à une certaine constante réelle, appelée constante de Khintchine. Ce théorème résulte de manière assez simple d'un théorème général très important : le théorème d'ergodicité, qui porte sur les propriétés statistiques d'un système dynamique.

Il s'agit donc d'un thème où il y a beaucoup de pistes à explorer, au gré des goûts et des intérêts des participants, avec des aspects très élémentaires, algébriques ou analytiques, tout comme des aspects plus subtils liés aux systèmes dynamiques et aux probabilités, mais qui peuvent être abordés de manière assez élémentaire et intuitive.