Formation « Modélisation » - 14 décembre 2017

Académie de Montpellier

PAF 2017-18

DAFPEN

IREM de Montpellier

IREM de Montpellier | Université de Montpellier | Académie de Montpellier

Situation n°1

Quelle est la taille du géant ?

Situation n°2

Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, par P.-F. VERHULST.

On sait que le célèbre *Malthus* a établi comme principe que la population humaine *tend* à croître en progression géométrique, de manière à se doubler après une certaine période, par exemple, tous les vingt-cinq ans. Cette proposition est incontestable, si l'on fait abstraction de la difficulté toujours croissante de se procurer des subsistances lorsque la population a acquis un certain degré d'agglomération, ou des ressources que la population puise dans son accroissement, même lorsque la société est encore naissante, telles qu'une plus grande division du travail, l'existence d'un gouvernement régulier et de moyens de défense qui assurent la tranquillité publique, etc.

En effet, *toutes choses égales d'ailleurs*, si mille âmes sont devenues deux mille après vingt-cinq ans, ces deux mille deviendront quatre mille après le même laps de temps.

Dans nos vieilles sociétés européennes, où les bonnes terres sont cultivées depuis long-temps, le travail employé à bonifier un terrain déjà en culture, ne peut ajouter à ses produits que des quantités sans cesse décroissantes; en admettant que, dans les premiers vingt-cinq ans, on ait doublé le produit du sol, dans la seconde période à peine parviendra-t-on peut-être à lui faire produire un tiers en sus. L'accroissement virtuel de la population trouve donc une limite dans l'étendue et la fertilité du pays, et la population tend, par conséquent, de plus en plus à devenir stationnaire.

Il n'en est pas de même dans certains cas, purement exceptionnels à la vérité; par exemple, lorsqu'un peuple civilisé cultive un territoire fertile, jusqu'alors sans habitans, ou lorsqu'il exerce une industrie qui donne de grands bénéfices temporaires. Une famille nombreuse devient alors une richesse et la seconde génération trouve plus facilement à s'établir que la première, parce qu'elle n'a pas comme elle à lutter contre les obstacles que l'état sauvage de la terre offrait aux premiers colons.

Pour juger de la vitesse avec laquelle la population croît dans un pays donné, il faut diviser l'accroissement de la population de chaque année par la population qui l'a fourni. Ce rapport étant indépendant de la grandeur absolue de la population, peut être regardé comme la mesure de cette vitesse. S'il est constant, la population croît en progression géométrique; s'il est croissant, la progression est plus que géométrique, et moins que géométrique s'il est décroissant.

On peut faire diverses hypothèses sur la résistance ou la somme des obstacles opposés au développement indéfini de la population. M. *Quetelet* la suppose proportionnelle au *carré de la vitesse avec laquelle la population tend à croître* [1].

C'est assimiler le mouvement de la population à celui d'un mobile qui tombe en traversant un milieu résistant. Les résultats de cette comparaison s'accordent, d'une manière satisfaisante, avec les données de la statistique et avec ceux que j'ai obtenus par mes propres formules, quand on suppose aux couches du milieu traversé, une densité indéfiniment croissante.

L'accroissement de la population a nécessairement une limite, ne fût-ce que dans l'étendue du sol indispensable pour le logement de cette population. Quand une nation a consommé tous les fruits de ses champs, elle peut à la vérité se procurer des subsistances du dehors par l'échange de ses autres produits, et supporter ainsi un nouvel accroissement de population. Mais il

[1]) *Essai de physique sociale*, tome Ier, p. 277.

est évident que ces importations doivent avoir des bornes, et s'arrêter long-temps même avant que la surface entière du pays soit convertie en villes. Toutes les formules par lesquelles on essaiera de représenter la loi de la population, doivent donc satisfaire à la condition d'admettre un *maximum* qui ne soit atteint qu'à une époque infiniment éloignée. Ce *maximum* sera le chiffre de la population devenue stationnaire.

J'ai tenté depuis long-temps de déterminer par l'analyse, la loi probable de la population; mais j'ai abandonné ce genre de recherches, parce que les données de l'observation sont trop peu nombreuses pour que les formules puissent être vérifiées, de manière à ne pas laisser de doute sur leur exactitude. Cependant, comme la marche que j'ai suivie me parait devoir conduire nécessairement à la connaissance de la véritable loi, quand on aura des données suffisantes, et que les résultats auxquels je suis parvenu peuvent offrir de l'intérêt, au moins comme objet de spéculation, j'ai cru devoir céder à l'invitation de M. *Quetelet*, et les livrer au public.

Soit p la population : représentons par dp l'accroissement infiniment petit qu'elle reçoit pendant un temps infiniment court dt. Si la population croissait en progression géométrique, nous aurions l'équation $\frac{dp}{dt} = mp$. Mais comme la vitesse d'accroissement de la population est retardée par l'augmentation même du nombre des habitans, nous devrons retrancher de mp une fonction inconnue de p; de manière que la formule à intégrer deviendra

$$\frac{dp}{dt} = mp - \varphi(p).$$

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur la forme de la fonction φ, est de supposer $\varphi(p) = np^2$. On trouve alors pour intégrale de l'équation ci-dessus

$$t = \frac{1}{m}\left[\log. p - \log. (m - np)\right] + \text{constante},$$

et il suffira de trois observations pour déterminer les deux coefficiens constans m et n et la constante arbitraire.

En résolvant la dernière équation par rapport à p, il vient

$$p = \frac{mp'\,e^{mt}}{np'\,e^{mt} + m - np'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

en désignant par p' la population qui répond à $t = o$, et par e la base des logarithmes népériens. Si l'on fait $t = \infty$, on voit que la valeur de p correspondante est $P = \frac{m}{n}$. Telle est donc *la limite supérieure de la population.*

Au lieu de supposer $\varphi p = np^2$, on peut prendre $\varphi p = np^{\alpha}$, α étant quelconque, ou $\varphi p = n \log. p$. Toutes ces hypothèses satisfont également bien aux faits observés; mais elles donnent des valeurs très-différentes pour la limite supérieure de la population.

J'ai supposé successivement

$$\varphi p = np^2,\ \varphi p = np^3,\ \varphi p = np^4,\ \varphi p = n \log. p;$$

et les différences entre les populations calculées et celles que fournit l'observation ont été sensiblement les mêmes.

Lorsque la population croît en progression plus que géométrique, le terme $-\varphi p$ devient $+\varphi p$; l'équation différentielle s'intègre alors comme dans les cas précédens, mais on conçoit qu'il ne peut plus y avoir de population *maxima*.

J'ai calculé les tableaux qui suivent d'après la formule (1). Les chiffres pour la France, la Belgique et le comté d'Essex avaient été puisés dans les documens officiels. Ceux qui concernent la Russie se trouvent dans l'ouvrage du Dr *Sadler*, *Law of population*, et je ne puis en garantir l'authenticité, ignorant de quelle manière ils ont été relevés. J'aurais pu étendre les tableaux pour la France et la Belgique jusqu'à 1837, au moyen des *Annuaires* publiés dans ces deux pays depuis 1833, et vérifier ainsi ma formule; mais mes occupations ne m'en ont pas laissé le loisir. Mon travail était terminé en 1833, et je n'y ai plus touché depuis.

Je ferai remarquer en passant que le tableau qui concerne la France semble annoncer que la formule est d'autant plus exacte, que les observations portent sur de plus grands nombres et ont été faites avec plus de soin. Au reste l'avenir seul pourra nous dévoiler le véritable mode d'action de la force retardatrice que nous avons représentée par φp.

N° 1.

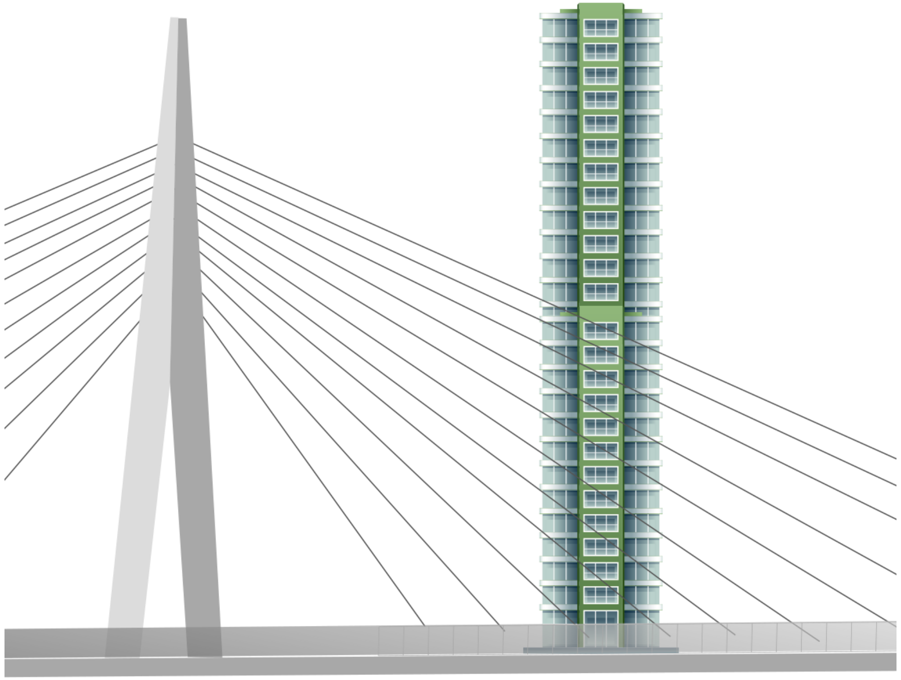
Tableau des progrès de la population de la France depuis 1817 *jusqu'à* 1831 , *d'après l'Annuaire pour* 1834.

ANNÉES.	D'APRÈS L'ÉTAT CIVIL.	D'APRÈS LA FORMULE.	ERREUR proportion^le^.	Logarithmes de la population calculée.
1817	29,981,336 195,902	29,981,336 208,281	0,0000	7,4768490
1818	30,177,238 161,948	30,189,500 204,500	+0,0004	7,4798565
1819	30,339,186 199,863	30,394,000 200,500	+0,0018	7,4827875
1820	30,539,049 188,227	30,594,500 197,300	+0,0018	7,4856461
1821	30,727,276 212,144	30,791,800 192,700	+0,0021	7,4884310
1822	30,939,420 198,634	30,984,500 189,500	+0,0014	7,4911453
1823	31,138,054 221,286	31,174,000 185,223	+0,0012	7,4937907
1824	31,359,340 220,546	31,359,340 182,777	0,0000	7,4963719
1825	31,579,886 175,974	31,542,000 178,000	—0,0012	7,4988859
1826	31,755,860 157,533	31,720,000 175,000	—0,0011	7,5013366
1827	31,913,393 189,071	31,895,000 172,000	—0,0005	7,5037257
1828	32,102,464 139,402	32,067,000 168,000	—0,0011	7,5060547
1829	32,241,866 161,074	32,235,000 164,500	—0,0002	7,5083251
1830	32,402,940 157,994	32,399,500 161,434	0,0000	7,5105385
1831 1r janv.	32,560,934 (Chiffre du recens^t^.)	32,560,934	0,0000	7,5126965

Source : Pierre-François Verhulst,

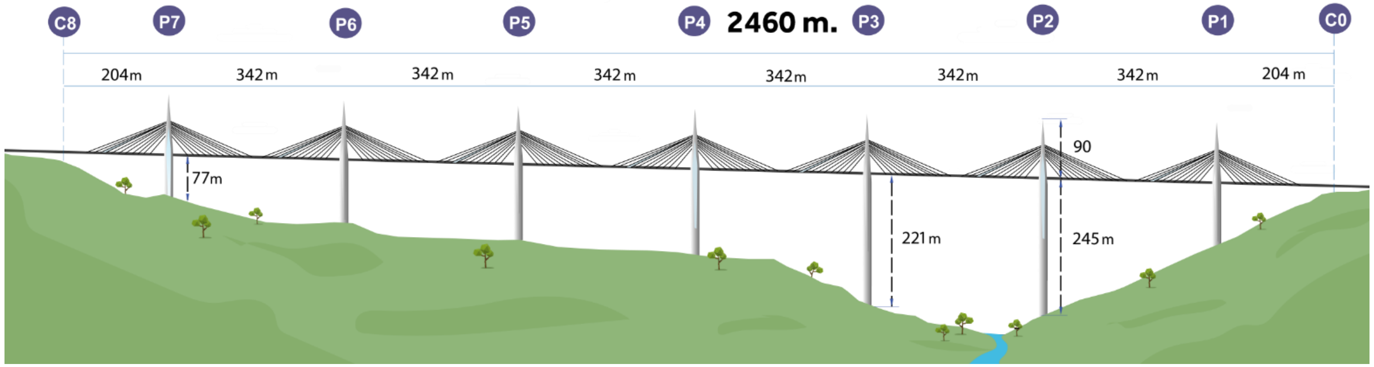
Correspondances Mathématiques et Physique de l'Observatoire de Bruxelles, Tome Quatrième, 1838

Situation n°3



Quelle longueur de câble a-t-il fallu pour réaliser le pont de Millau ?

Source : http://www.leviaducdemillau.com



Situation n°4 :

Le parti espagnol d'opposition a récemment présenté au Congrès, le 25 avril 2006, 4 millions de signatures contre une nouvelle loi soutenue par le gouvernement.

Tous les journaux espagnols ont publié des photos des grandes caisses et des 10 camionnettes nécessaires pour transporter les feuilles de papier au Congrès. Pensez-vous qu'il y avait une intention politique derrière cette mise en scène ou bien croyez-vous que toutes ces caisses et ces camionnettes étaient vraiment nécessaires pour transporter ces 4 millions de signatures?

Situation n°5 :

En 1993, les réserves mondiales de gaz naturel étaient estimées à 141,8 milliards de mètres cubes. Depuis cette date, on a utilisé chaque année en moyenne 2,5 milliards de mètres cubes. Calculez à quelle date les réserves de gaz naturel seront épuisées. Utilisez différentes hypothèses et modèles. Expliquez toutes vos étapes.

Situation n°6 :

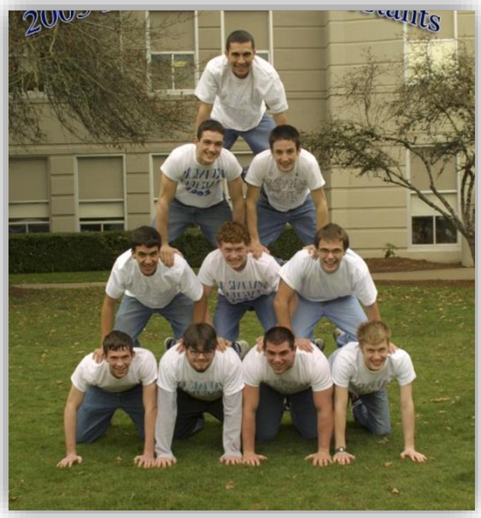
Un chasseur affamé rencontre dans les champs deux bergers qui commençaient leur repas ; l'un avait cinq fromages et l'autre et l'autre en avait trois. Permettez-moi de partager votre repas, dit-il aux bergers, je donnerai bonne récompense.. Les trois compères se partagent également les fromages et le chasseur s'éloigne en laissant 8 pièces d'or !

Que revient-il à chacun des bergers ?

Source : « *Arithmétique diabolique* »,

Edouard Lucas, 1889

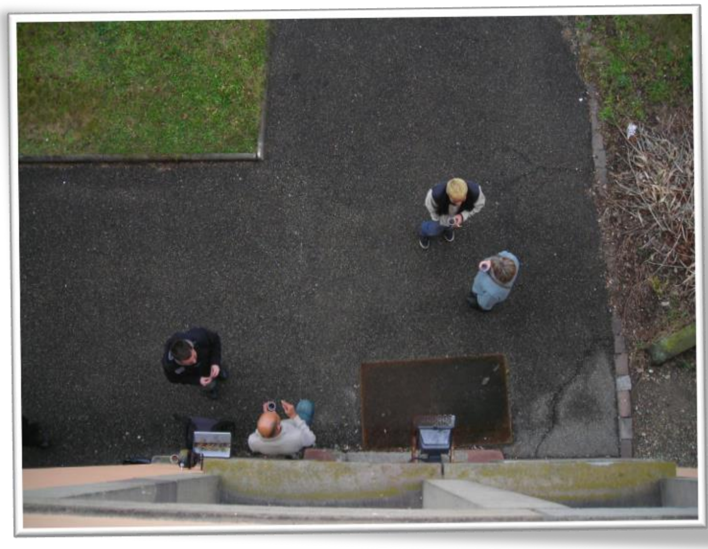
Situation n°7 :



Les deux photographies illustrent deux méthodes pour réaliser des pyramides humaines .

Pour chacune de ces méthodes, combien faudrait-il de personnes pour faire une pyramide de 12m ?

Situation n°8 :



A quelle hauteur du sol cette photographie a-t-elle été prise ?

Situation n°9 :

beschneit • Beleuchtete Rodelbahn am Schloßberg / Hochstein 1

SKIGEBIET LIENZ-ZETTERSFELD 1.660 m – 2.278 m

SKIPISTEN

	Name	Länge		Name	Länge
1	Familie	2.620 m	6	Märchenwiese	1.330 m
2	Osthang	1.840 m	7	Idlboden	1.080 m
2a	Osthangumfahrung	700 m	8	Faschingalm	2.480 m
3	Mittelhang	1.580 m	8a	Peheim	1.050 m
4	Goldener Pflug	1.690 m	9	Panorama	1.250 m
4a	Pflugumfahrung	800 m	10	Biedneralm	250 m
4b	Stieglerschuss	660 m	13	Skiroute	2.760 m

SEILBAHNEN / LIFTE

	Name	Fahrzeit	Höhendiff.
Z1	Einseilumlaufbahn Zettersfeld	10 min.	1.084 m
Z2	4er-Sesselbahn Steinermandl	5 min.	391 m
Z3	Tellerlift Biedner	2 min.	52 m
Z4	Schlepplift Schoberköpfl	4 min.	188 m
Z5	Tellerlift Haidenhof	2 min.	41 m
Z6	4er-Sesselbahn Wartschenbrunn	6 min.	213 m
Z7	6er-Sesselbahn Faschingalm	7 min.	528 m

Vous souhaitez skier le plus possible pendant la journée de demain.

Vous prévoyez de skier sans interruption avec une pause d'une heure pour déjeuner.

Combien de kilomètres envisager vous de faire ?

Situation 10 :

Le document ci-dessous définit la « prime de participation » des salariés aux bénéfices de leur entreprise. Cette prime est encadrée et fait l'objet d'un accord d'entreprise.

Quelle règle de répartition proposeriez-vous ?

De quoi s'agit-il ?

La participation consiste à verser à chaque salarié une part sur les bénéfices de l'entreprise.

Elle est obligatoire lorsque l'entreprise a employé 50 salariés pendant 12 mois, consécutifs ou non, au cours des 3 derniers exercices.

La participation est mise en place par voie d'accord entre l'entreprise et les salariés ou leurs représentants. L'accord indique notamment les règles de calcul, d'affectation et de gestion de la participation. Il précise aussi sa durée.

En l'absence d'accord, un régime dit *d'autorité* est imposé à l'entreprise.

Bénéficiaires

Information du salarié

Montant

Prime de participation

Le montant de la participation est aléatoire, car il résulte des bénéfices réalisés par l'entreprise.

Après la clôture de *l'exercice*, l'entreprise calcule la part des bénéfices à distribuer aux salariés (la *réserve spéciale de participation*). Elle doit utiliser une formule de calcul fixée par la loi. Une autre formule est possible à condition d'être au moins aussi favorable.

La répartition de la prime entre les salariés peut être :

- uniforme,
- proportionnelle au salaire ou au temps de présence du salarié,
- ou combiner plusieurs de ces critères.

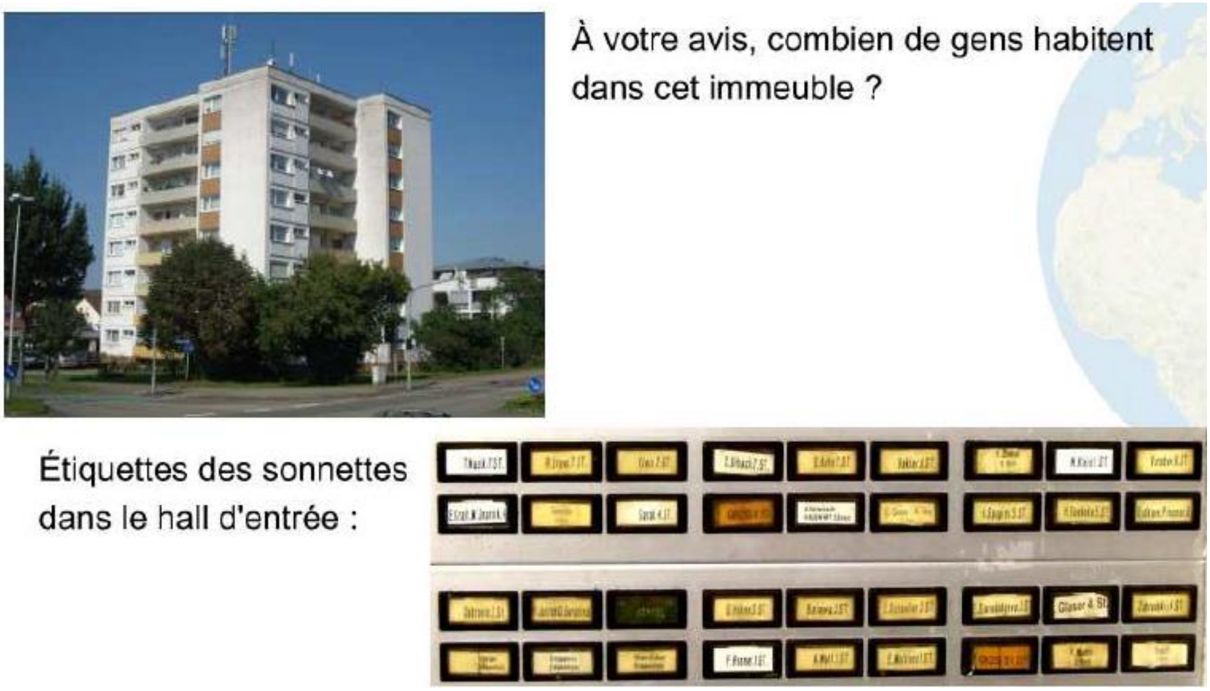
Le montant de la prime est plafonné.

Plafonnement annuel de la prime de participation

Prime versée au titre de l'année	Montant maximum de la prime
2016	**28 962 €**
2017	**29 421 €**

D'après une idée originale d'Alain Stenger du groupe IREM PLP Maths-Sciences de Strasbourg.

Situation 11 :



Situation 12 :

1-) Combien y-a-t-il de façons de payer exactement 5€ avec des pièces de 0,5€, 1€ et 2€ ?

2-) Combien y-a-t-il de triangles dans la figure ci-dessous ?