LA RESOLUTION COLLABORATIVE DE PROBLEMES COMME MODALITE DE LA DEMARCHE D'INVESTIGATION

Groupe ResCo [1]
Irem de Montpellier

Cet article est également consultable en ligne sur le portail des Irem *(onglet : Repères Irem) : http://www.univ-irem.fr/*

Introduction

Dans les programmes de 2005 [2] au collège apparaît le terme de démarche d'investigation ; depuis il est demandé aux enseignants de mettre en œuvre de véritables activités de recherche pour développer chez les élèves une culture scientifique. Néanmoins ces injonctions semblent suivies de peu d'effets compte tenu de la difficulté de la mise en place de telles activités dans les classes. Les freins à cette évolution des pratiques sont nombreux et se pose la question de comment aider les enseignants à modifier leurs postures face aux élèves ? En effet, l'enseignant se retrouve dans une position où il n'est plus celui qui détient le savoir et le transmet. Il se pose en tant que facilitateur et organisateur de la démarche de recherche. Il ne doit pas intervenir en donnant des réponses précises mais en permettant les échanges et l'avancée du travail en groupe.

Depuis plusieurs années le groupe ResCo [3] de l'Irem de Montpellier se penche sur cette problématique, organisant dans le cadre du PAF (Plan Académique de Formation) un stage de formation

1 Saïd AZZIZ, Aurélia BROUZET, Geneviève COUDERC, Viviane DURAND-GUERRIER, Etienne MANN, Henri SAUMADE, Mireille SAUTER, Sébastien VIRDUCI, Sonia YVAIN

2 B.O. hors série n° 5 du 25 août 2005

3 Résolution Collaborative de Problèmes : http://www.irem.univ-montp2.fr/Resolution-de-problemes

continue comportant une session de résolution collaborative de problèmes ; ce dispositif est à l'origine de travaux de recherche qui lient travail collaboratif et démarche d'investigation. En observant les évolutions de postures des stagiaires, les travaux effectués dans les classes, les modifications de comportement des élèves face aux mathématiques, les membres du groupe ResCo ont été amenés à travailler certaines hypothèses d'enseignement.

1. L'évolution des pratiques des enseignants ne peut se faire qu'avec un accompagnement, au sein d'une communauté ; ce point de vue a été développé dans un article de la revue Repères-Irem (Sauter 2008).
2. Pour qu'une démarche d'investigation vive dans les classes, il faut lui donner du temps. La recherche collaborative, organisée sur cinq semaines à raison d'une séance hebdomadaire permet aux élèves de s'approprier le problème, prendre des initiatives, développer des stratégies de résolution.
3. Le choix de problèmes favorisant la mise en œuvre d'une démarche d'investigation est essentiel. Dans cette optique, le groupe ResCo a choisi de poser des problèmes dont les énoncés ne sont pas exprimés en termes mathématiques, afin que les élèves perçoivent les mathématiques non comme un objet d'étude mais comme un outil de réflexion et de modélisation du réel. La situation idéale d'étude serait d'être ancrée dans le réel pour permettre un questionnement sur les rapports qu'entretiennent les mathématiques et le monde, mais la mathématisation d'une telle situation est souvent trop complexe aux niveaux considérés (élèves de 11 à 18 ans), aussi le groupe ResCo a développé un type de problème appelé « fiction réaliste ».

Cet article présente les travaux conduits dans le groupe liant travail collaboratif et démarche d'investigation.

1. — Présentation du dispositif

Le dispositif de résolution collaborative de problèmes repose sur des échanges entre des classes qui travaillent sur le même problème de recherche, posé sous une forme non mathématique. Pendant cinq semaines, les élèves échangent des questions, des réponses, des idées, des procédures et des conjectures. Ces échanges sont pris en charge par les enseignants sur une plateforme Internet dans un forum privé dédié au groupe.

Le problème travaillé fait entrer les élèves dans une démarche scientifique et le déroulement de leur recherche suit les différentes étapes d'une démarche d'investigation dont le canevas est défini dans l'introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques[4] des programmes du collège. En 2013, soixante classes du secondaire ont travaillé sur un même problème ; il y avait soixante-dix classes engagées en 2012 ; ce dispositif concerne ainsi environ deux mille élèves chaque année, les classes étant réparties en groupes de deux ou trois afin de faciliter les échanges.

Le stage comporte deux jours en présentiel qui précèdent la période de recherche dans les classes. Ces journées permettent d'installer un climat de confiance entre les enseignants et contribuent à l'intégration des nouveaux stagiaires dans la communauté qui s'est créée autour de la résolution collaborative de problèmes depuis plusieurs années.

Le travail en groupe dans les classes est très important dans la recherche collaborative, c'est pourquoi lors de la première journée, les stagiaires sont confrontés à un travail de recherche en groupe selon les pratiques des problèmes ouverts de Lyon (Arsac, Germain & Mante,

4 B.O. hors série n° 5 du 25 août 2005

1988). Entre les deux jours de présentiel, certains enseignants n'ayant jamais proposé ce type d'activités à leurs élèves, il leur est conseillé d'organiser de telles recherches dans leurs classes, une liste de problèmes leur étant distribuée à cette fin.

Lors du second présentiel, les stagiaires ont l'occasion de partager leurs expériences autour des productions de leurs élèves, puis la fiction réaliste de l'année leur est proposée. Elle est cherchée, discutée, modifiée afin d'emporter l'adhésion de tous les participants. Ainsi, l'enseignant sera plus à l'aise en classe pour faire chercher ses élèves. Durant cinq semaines, la recherche collaborative fait vivre aux élèves une véritable démarche d'investigation comme on va le voir dans ce qui suit. Pour présenter le dispositif nous avons adopté le canevas de la recherche.

Choix d'une situation qui sera appelée fiction réaliste dans ce dispositif

Selon les années, le groupe ResCo est composé de un ou deux enseignants chercheurs de l'université de Montpellier et plusieurs enseignants de collège et lycée. Ces collègues sont responsables du choix de la situation qui sera proposée aux stagiaires pour la session de résolution collaborative. A partir d'un problème mathématique ou d'une situation pseudo mathématique, une fiction réaliste est construite suivant les caractéristiques qui seront présentées ultérieurement. Une analyse *a priori* est réalisée ; celle-ci est en général reprise et enrichie à l'issue de la session ; en effet, l'inventivité, l'originalité des pensées des élèves sont toujours pour nous sources d'étonnement et de découvertes.

Appropriation du problème par les élèves

Les deux premières semaines sont consacrées à l'exploration du problème et aux premières pistes vers une mathématisation :

1ère *semaine :* recherche en groupe dans la classe et envoi de questions aux autres classes du groupe.

2ème *semaine :* recherche sur les questions reçues des autres classes et envoi des réponses.

D'une classe à l'autre, les questions varient peu : cela impose souvent aux élèves de répondre aux questions qu'ils se sont eux-mêmes posées. Ils doivent s'interroger sur l'influence de certains paramètres sur des solutions, et faire des choix parmi des modalités possibles.

Lors de cette phase, le groupe ResCo suit les échanges questions-réponses de manière à pouvoir rédiger une relance adéquate. Cette relance, signée par l'enseignant-chercheur vise à orienter la recherche vers un problème mathématique commun, en prenant en compte les propositions des élèves pour fixer les valeurs de certaines des variables didactiques identifiées dans l'analyse *a priori*.

Formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives - Investigation ou résolution du problème - Echanges argumentés

Les deux semaines suivantes sont consacrées à la poursuite des recherches et des échanges avec un envoi à la fin des deux semaines. Les élèves élaborent alors des conjectures, échangent des pistes de solutions et argumentent pour défendre et justifier leurs raisonnements et leurs résultats. Les recherches en classe s'effectuent, en général, en groupe. Les conjectures et les résultats sont discutés entre les élèves et envoyés aux autres classes. Pour infirmer les conjectures, les élèves font un travail très important sur la notion de contre-exemple. Pour les valider, ils sont sensibilisés à la nécessité de la démonstration.

La 4ème semaine se termine par la rédaction d'un compte-rendu individuel sous forme de narration de recherche (Bonafé & *al* 2002) qui va alimenter le débat de clôture de la cinquième semaine.

Acquisition
et structuration des connaissances

Après cinq semaines de recherche en classe, un bilan est indispensable pour clore ce travail. Elèves et enseignants prennent alors conscience du travail accompli.

En plus d'un travail sur la démarche scientifique (conjectures, contre-exemple…) suivant leur niveau, les élèves ont réinvesti des notions déjà abordées et acquis des connaissances qu'ils pourront approfondir. Il est donc important à la fin de la recherche de faire le point avec les élèves pour mettre en évidence toutes les notions mathématiques que le problème a permis de mettre en œuvre.

Parallèlement à ce bilan, le problème doit être clôturé par une synthèse des résultats obtenus. En général le problème n'est jamais vraiment terminé, car il y rarement une solution unique et bien des prolongements sont possibles. Ce bilan est différent suivant les niveaux et adapté à chaque classe par l'enseignant.

2. — Fiction réaliste et mathématisation

Comment définir une fiction réaliste ?

Dans son mémoire de master professionnel (Ray 2013, p. 27), Benoit Ray écrit que « Les situations proposées dans le dispositif ResCo ne sont pas directement issues de la réalité mais elles relèvent de la réalité et sont posées complètement hors du cadre mathématique, c'est la raison pour laquelle elles sont qualifiées de fictions réalistes ». Il propose de définir les fictions réalistes suivants certains critères :

- c'est une situation *a priori* non mathématique,
- le contexte de cette situation est fictif mais réaliste,
- une prise en charge efficace de cette situation demande une phase de modélisation,
- la phase de modélisation peut renvoyer à plusieurs problèmes mathématiques selon les choix faits.

Le rôle de la fiction réaliste est de donner des raisons de se poser des questions. Les élèves ne cherchent pas à décoder le problème mathématique qui est derrière cette fiction. Ils « y croient », les questions et réponses des élèves lors des deux premières séances attestent de leur adhésion à cette phase de questionnement.

Présentation de la fiction réaliste de la dalle d'Anubis cherchée lors de la session de résolution collaborative de 2012-2013

Problème de la dalle d'Anubis : L'archéologue Howard Carter a découvert le 4 novembre 1922 dans le tombeau de Toutankhamon les règles d'un jeu utilisé pour découvrir lequel de ses conseillers était le plus habile. Deux joueurs sont dans une pièce avec des dalles au sol. Sur la dalle dans l'angle Nord-Est se trouve la statue d'Anubis : celui qui s'arrête sur cette dalle va dans le monde des morts et perd. Le premier joueur se met sur la dalle qu'il veut. Puis le second joueur se met également sur une dalle de son choix.

Les joueurs jouent à tour de rôle. Celui qui joue quitte sa dalle, qui alors s'effondre, entraînant avec elle toutes les dalles situées au sud, à l'ouest et au sud-ouest. Il se place sur une dalle restante.

Saurez-vous être le plus habile ?

Quelle est la genèse de cette fiction réaliste ?

Le point de départ est le jeu de Gale communément appelé le jeu de la tablette de chocolat, ou encore “Chomp”, dont voici l’énoncé :

Le carré situé en bas à gauche d’une tablette de chocolat, est empoisonné. Chacun à son tour chaque joueur doit désigner un carré de chocolat et le manger, ainsi que tous les carrés situés en haut à droite de ce carré. Le joueur qui mange le carré fatidique meurt et perd donc la partie.

Mais des éléments de réponse au problème, voire des solutions complètes étant disponibles sur Internet, il est décidé de modifier le sujet tout en restant en dehors du champ des mathématiques. En gardant l’idée d’une forme de jeu, dans lequel les mathématiques « finiront par s’inviter », il est proposé l’énoncé du « Jeux Egyptien » qui commence de la manière suivante :

Une salle rectangulaire est dallée, en bas à gauche se trouve la dalle mortelle de la statue d’Anubis, les joueurs peuvent se déplacer en avant et vers la gauche …

Mais la formulation des déplacements est difficile à décrire et ne rencontre pas l’accord du groupe. Une nouvelle proposition est faite en changeant totalement le thème : « Le marché de Tunis ». Les déplacements se font « sud ouest » ou « nord est ».

A Tunis, tous les dimanches c’est le marché. Sur la place, le gardien du marché a tracé un quadrillage géant. L’entrée du marché se trouve au sud-ouest de la place, chaque marchand doit installer son stand sur une case, mais il y a une case maudite où les marchands font le moins de bénéfice, elle se situe à l’opposé de l’entrée. Pour le marché de dimanche prochain, deux marchands ne sont toujours pas positionnés et il ne reste que deux cases dont la maudite. Le gardien leur propose un défi pour déterminer lequel s’installera sur la case maudite.

Le premier marchand se positionne sur une case.

Le deuxième marchand se positionne sur une case qui ne doit pas se situer au sud et à l’est (ou sud-est) du premier marchand (ou qui doit se situer au nord et/ou à l’ouest du premier marchand)

Le premier marchand fait de même et ainsi de suite à tour de rôle.

Le marchand qui tombera sur la case maudite restera sur cette case.

Aide les marchands à ne pas tomber sur la maudite case !!!

Finalement, pensant que le thème d’un jeu est plus stimulant pour les élèves, le « Jeu Egyptien » est retravaillé en adoptant la formulation des déplacements du « Marché de Tunis », et c’est ainsi que naît l’énoncé de la « Dalle d’Anubis ».

Il est très important de noter que dans cet énoncé, le fait que les dalles s’effondrent après le déplacement change complètement le jeu par rapport au jeu de la tablette de chocolat. L’anticipation de ce qui va s’effondrer ensuite, ajoute de la difficulté au jeu et à la découverte des stratégies. Une solution a d’ailleurs été envoyée, à la fin des recherches, à tous les enseignants, elle est présentée dans l’annexe 2.

Comment les élèves s’approprient-ils cette fiction réaliste ?

Voici quelques questions des élèves :

Q_1 - Que représente la statue d'Anubis ? Qui est Anubis ?
Q_2 - Que signifie saurez-vous être le plus habile ?
Le gagnant fait comment pour sortir de là quand c'est fini ?
Q_3 - Le joueur peut-il avancer de plusieurs dalles à la fois ?
Q_4 - Quelle est la forme de la pièce sachant que comme il y a un angle, ça ne peut pas être un disque ? Combien y a-t-il d'angles dans cette salle ?
Q_5 - Que devient le gagnant ? Comment fait-il pour sortir du jeu ? A quoi ça sert de gagner si on reste bloqué dans la pièce ?

On voit que les élèves ne rentrent pas directement dans un traitement mathématique de la situation. Leurs questions sont très réalistes et pragmatiques. Elles relèvent de la culture (Q_1), du sens des mots (Q_2), de la compréhension des règles (Q_3) et de la modélisation du problème ($Q_{4\text{-}5}$). Elles amènent des discussions essentielles qui permettent aux élèves de faire des choix argumentés et de s'approprier la situation comme l'illustrent les réponses suivantes :

R_1 - Anubis, un homme à tête de chacal - Le dieu de la mort chez les égyptiens
R_2 - Saurez-vous gagner.
R_3 - L'énoncé dit « Sur une dalle restante » donc oui
« Toutes les cases restantes »
On ne peut avancer que d'une dalle sinon le premier a gagné en un coup
R_4 - On ne sait pas. Si la pièce pas rectangle alors pas d'angle
R_5 - Cela n'a pas d'importance pour trouver la stratégie. Le vainqueur sera récupéré par le pharaon de toute façon.

Présentation de la fiction réaliste de l'artiste cherchée lors de la session de résolution collaborative de 2009-2010

Le problème de l'artiste : Un artiste contemporain veut réaliser une œuvre sur un support rond, en plantant des clous sur le pourtour et en tendant des fils entre les clous. Il se propose de peindre chaque zone d'une couleur différente. De combien de couleurs aura-t-il besoin ?

Quelle est la genèse de cette fiction réaliste ?

Le point de départ est le « problème des cordes » : *combien y a-t-il de régions déterminées dans un disque par toutes les cordes joignant les points deux à deux ?*

Des recherches sur ce problème, dans des classes de différents niveaux, ont été menées par le groupe EXPRIME [5] dont les analyses ont servi de bases de travail. Il est décidé de conserver ce problème en modifiant son énoncé pour éviter les solutions disponibles sur Internet et répondre aux objectifs liés à la construction d'une fiction réaliste.

De nombreuses idées de situations sont proposées :

- puzzle de forme ronde ;
- enseigne lumineuse ;
- partage d'un objet en bois, mais on est confronté dans les deux cas à un problème technique de découpage ;
- tableau contemporain dans le style de Klee ;
- logo ou décoration de forme ronde ;
- jeu vidéo (type Dofus) : un concepteur de jeux vidéo imagine une banque avec une

5 Groupe de l'Irem de Lyon

salle des coffres ronde pour conserver les «kamas» numériques de ses personnages. Les coffres-forts seront séparés par des faisceaux lasers joignant tous les émetteurs du pourtour de la pièce. Chaque personnage a une «bouloute» électronique pour transporter les «kamas» dans son unique coffre. Combien de personnages différents pourront jouer ?

Au final, c'est l'idée d'une œuvre contemporaine qui est retenue.

Comment les élèves s'approprient-ils cette fiction réaliste ?

La contextualisation du problème conduit les élèves à poser des questions ancrées dans le réel, tout en utilisant un vocabulaire mathématique, comme dans l'exemple ci-dessous :

Voici nos questions en espérant qu'elles vous aideront dans vos recherches.

Qu'est-ce qu'un pourtour ?

Quel est le diamètre du cercle ?

Combien y a-t-il de clous ?

Quel est le diamètre des clous ?

Quelle est la distance entre deux clous ?

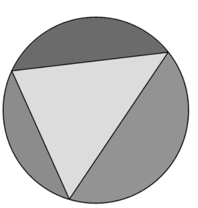
Quelle est la longueur du fil ?

Qu'est ce qui délimite les zones ?

La réponse est-elle 3 ?

Avec les trois couleurs primaires, on peut créer toutes les couleurs souhaitées.

Voici un exemple qui prouve que trois couleurs seulement ne suffisent pas pour colorier toutes les zones.



Dans les échanges entre deux classes on voit apparaître une question centrale dans ce problème de modélisation, à savoir la mise en perspective entre l'indépendance théorique du nombre de zones par rapport à la dimension du cercle, et la dépendance matérielle dans le cas d'une réalisation effective.

— Combien de clous ?
On ne peut pas savoir mais ça ne peut être ni 1, ni 2 car sinon on ne pourra tendre plusieurs fils.
— Combien de cm le support ?
On se demande si c'est vraiment important de connaître les dimensions du support. Peut-être que si le support est très grand, on pourra mettre plus de clous et donc il y aura plus de zones.
— On peut faire un dessin ?
Oui en choisissant le nombre de clous et la taille du support.
— Le fil, il le place comment ? Il peut traverser ou il fait le tour ?
Le fil est placé entre les clous et donc il traverse le cercle. Si on ne fait que le tour, le fil ne sera pas tendu.
— Quel espacement entre les clous ?
On ne peut pas savoir.
— Qu'est-ce qu'un pourtour ?
Un pourtour, c'est le tour du support rond.
— Combien de fils entre les clous ?
On ne peut pas savoir.
— Comment sont plantés les clous sur le pourtour ?
Cela ne sert à rien de savoir comment sont plantés les clous.
— A-t-on assez de couleurs ?
Oui, il y a une infinité de couleurs.

Ces questions-réponses montrent que les élèves essaient d'abord de s'approprier les objets réels, et nous émettons l'hypothèse que c'est principalement lié au fait que dans les propositions de fictions réalistes, les choix de mathématisation ne sont pas donnés *a priori*. La place des questions dans le dispositif est significative dans la mesure où elle déclenche le processus de mathématisation. Le fait de laisser vivre les questions permet de ne perdre aucune interrogation des élèves. C'est dans la phase des réponses que, d'une part, les questions pertinentes pour le processus de mathématisation vont se dégager et que, d'autre part, vont apparaître les différents choix possibles de mathématisation. Les élèves expriment d'autant plus librement leur questionnement qu'il est à destination d'autres élèves. A leur tour, ils vont recevoir des questions émanant de leur groupe, souvent communes aux leurs, les amenant à répondre à leurs propres questions. Ces questions similaires leur permettent souvent de mieux identifier les grandeurs pertinentes et, à travers les réponses à rédiger, de débuter le processus de mathématisation.

3. — Présentation d'autres fictions réalistes

Genèse de la fiction réaliste de la monnaie

La fiction sur la monnaie est un exemple très intéressant de situation où les élèves ont fait des choix qui ont détourné l'idée initiale du problème.

Problème des monnaies : Serait-il possible d'utiliser un système de monnaie où il n'existerait que des pièces de valeurs 9 et 11 ?

Le problème mathématique de départ est le suivant :

Quel est le plus grand nombre que l'on ne peut pas atteindre comme somme de 7 et de 13 ?

Cherché dans le groupe ResCo, ce problème s'est montré assez « résistant », avec des approches de résolution variées (calculs, tableur…). A partir de cet énoncé, il est décidé de construire une fiction réaliste.

Lors d'un travail de réflexion sur le rapport PISA [6], un des tests proposés aux élèves est apparu comme une situation ayant de nombreux points communs avec le problème :

Serait-il possible d'utiliser un système de monnaie (ou un système de timbres) qui utiliserait exclusivement les valeurs 3 et 5 ? Plus spécifiquement, quels montants pourrait-on obtenir ainsi ? S'il s'avérait possible, un tel système serait-il souhaitable ?

L'idée de la monnaie est retenue pour la fiction en choisissant (9, 11) comme valeur pour la variable didactique « couple de nombres », dans l'optique que ces nombres permettent de rendre le problème plus intéressant que 3 et 5 :

Serait-il possible d'utiliser un système de monnaie où il n'existerait que des pièces de valeur 9 et 11 ?

Lors de l'appropriation de cette situation par les élèves, leur choix a été de rendre la monnaie et le problème a évolué différemment de ce que nous avions prévu dans l'analyse *a priori* qui en avait été faite. En décidant de rendre la monnaie les élèves ont travaillé sur des combinaisons linéaires de 9 et de 11 à coefficients entiers relatifs alors qu'initialement la recherche portait uniquement sur des coefficients entiers naturels. En modifiant par la suite les valeurs de la variable didactique « couple de nombres », un travail très riche sur l'identité de Bezout a été mené de la sixième à la terminale. L'exposé de ce travail a fait l'objet

6 Rapport PISA http://www.pisa.oecd.org/

d'un article dans un bulletin de l'APMEP (Combes & *al* 2004).

On pointe là ce qui rend passionnant ce travail collaboratif dans les classes. Les élèves peuvent prendre des initiatives, mener une véritable démarche d'investigation en s'appropriant le problème et parfois « bousculer » les prévisions issues des analyses *a priori*.

Par la suite pour rester dans les objectifs initiaux de ce problème, il a été envisagé de travailler sur la situation suivante :

> *Lulu joue aux fléchettes, la cible est constituée de deux disques concentriques de couleurs noire et blanche, si la flèche tombe dans le noir, il obtient 11 points et si elle tombe dans l'anneau blanc, il obtient 9 points. Hier il a obtenu 47 points, combien de fois la flèche a-t-elle atteint le blanc et le noir ? Lulu aurait-il pu atteindre un score de 23 ? Quel est le plus grand score qu'il ne peut pas atteindre ?*

Genèse de la fiction réaliste de la banquise

> **Problème de la banquise** : En Antarctique, une base de scientifiques est en panne de carburant. La base la plus proche est située à 1000 km et peut se permettre de leur céder 3000 litres de carburant pour les dépanner. Dans cette deuxième base, ils disposent d'un véhicule pouvant transporter au maximum 1000 litres. Du carburant peut être déposé en chemin. Ce véhicule consomme 1 litre par kilomètre parcouru sur la banquise. Quelle quantité de carburant ce véhicule pourra-t-il acheminer à la base scientifique ?

La situation de départ est celle du problème des bananes :

> *Un éléphant a pour mission d'amener le plus de bananes possible de l'oasis A à l'oasis B. 1000 km séparent ces 2 oasis et il y a 3000 bananes à l'oasis A. Le problème est qu'il ne peut pas en prendre plus de 1000 à la fois et qu'à plein ou à vide, il doit absolument manger une banane par kilomètre parcouru pour survivre… Combien de bananes peut-il amener à l'oasis B ?*

Sous cette forme le problème est beaucoup trop connu et les solutions faciles à trouver sur Internet. La première idée est celle d'un cycliste :

> *Une entreprise pharmaceutique fabriquant des substituts de repas sous forme de pastilles organise une course de relais à travers la France à but humanitaire pour l'association « Un repas pour tous ».*
>
> *Chaque équipe doit parcourir 1000 km en autonomie alimentaire. Les équipes ont au départ à leur disposition 3000 pastilles de 1g. Les cyclistes courent à tour de rôle, croquent une pastille par km pour résister, ne peuvent transporter dans leur banane plus de 1kg de pastilles, et ne peuvent revenir sur leurs pas qu'une seule fois. Chaque pastille non consommée à l'arrivée rapportera 100 €. Combien cette opération peut-elle rapporter au maximum à l'association.*
>
> *Prolongement : En cas d'ex-aequo, un bonus de 1000 € par coureur sera accordé à l'équipe qui comportera le moins de cyclistes. Combien cette opération peut-elle alors rapporter au maximum à l'association ?*

Mais cet énoncé est jugé trop compliqué pour une partie du public visé et la fiction proposée aux élèves devient celle de « la banquise ».

De nombreuses autres fictions sont accessibles sur le site de l'Irem de Montpellier [7].

7 http://www.irem.univ-montp2.fr/SPIP/Resolution-collaborative-de,96

Réunissant les travaux de plusieurs années, ce site est la mémoire de travail du groupe ResCo et de la communauté des enseignants constituée autour de la résolution collaborative. Pour certaines fictions des ressources complètes sont disponibles à l'intention d'enseignants intéressés par ce type d'activité.

4. — La résolution et les apprentissages

La lecture des ressources mises en ligne sur le site du groupe ResCo montre que, même si les recherches semblent spécifiques à chaque fiction réaliste, il se dégage des invariants dans les différentes phases du dispositif.

Analyse des questions produite par les élèves dans la première phase

Voici (cadre ci-dessous) l'écrit d'un élève à l'issue d'une séance de recherches (problème de l'artiste). On trouve ce type de réflexion assez fréquemment dans les premières séances, dès que les élèves prennent connaissance du problème qui leur est proposé. Elle traduit bien la difficulté de la mise en œuvre d'une démarche heuristique, car les élèves ont pris l'habitude de chercher des problèmes où il est question de ''démontrer'' rigoureusement des résultats souvent abstraits et de ''justifier'' rigoureusement leur raisonnement, bridant ainsi toute imagination et créativité. Ils ont souvent l'habitude de résoudre des problèmes dont les énoncés sont décomposés en sous-questions qui ne favorisent pas les prises d'initiative. La nature même des fictions réalistes proposées provoque des questions, nombreuses et diverses, des plus pertinentes aux plus « accessoires ». Ces questions sont regroupées dans quatre domaines, listés ci-dessous avec des exemples extraits des échanges des problèmes de l'artiste et celui de la dalle d'Anubis.

1. ***Des questions « hors champ mathématique »*** **:** définitions de mots, aspects concrets de l'énoncé.

Problème de la dalle d'Anubis

— *Qui est Anubis ? Que représente la statue d'Anubis ?*

— *Est-ce que ce jeu existe toujours ?*

— *Que veut dire celui qui s'arrête sur cette dalle va dans le monde des morts et perd ?*

Problème de l'artiste

— *Quel est le nom de l'artiste ? Est-ce que le personnage existe vraiment ?*

— *Qu'est-ce qu'un pourtour ?*

— *Est-ce que l'on peut utiliser plusieurs fois la même couleur ?*

— *Quelle est la couleur des clous ?*

2. ***Des questions pour préciser l'énoncé*** **:**

Problème de la dalle d'Anubis

— *Peut-on se placer sur la même dalle que l'adversaire ?*

> Dans cette séance, on n'a pratiquement pas progressé. On s'est senties dépassées par les nombreuses questions et on ne savait pas par où commencer.

— *Le joueur peut-il avancer de plusieurs dalles à la fois ?*
— *Le joueur peut-il sauter une dalle ?*
— *A-t-on le droit de reculer ?*
— *Peut-on se déplacer en diagonale ?*

Problème de l'artiste

— *Comment les clous sont-ils disposés ? Combien a-t-il planté de clous ?*
— *Est-ce qu'une zone peut-être délimitée par le pourtour du cercle ?*
— *Est-ce qu'un clou a plusieurs fils ? Combien de fils a-t-il tendus ?*
— *Quels sont l'aire et le périmètre du support ?*

3. ***Des questions sur la modélisation du problème :***

Problème de la dalle d'Anubis

— *Combien y a-t-il de dalles ?*
— *Quelle est la forme de la pièce sachant que comme il y a un angle, ça ne peut pas être un disque ?*
— *Est-ce que la pièce est carrée, rectangulaire, ou autre ?*
— *Est-ce que l'on peut se déplacer dans tous les sens sauf vers le sud-est et sud-ouest ?*

Problème de l'artiste

— *Quelle est la distance la plus petite entre les clous ?*
— *Est-ce que toutes les zones sont de même taille ?*
— *Quel est le rayon du support ?*
— *Quelle est la longueur maximale des fils ?*
— *Comment faut-il positionner les clous ?*
— *Est-ce que les fils peuvent passer par plusieurs clous ?*

4. ***Des questions sur la recherche de solutions*** :

Problème de la dalle d'Anubis

— *Qui joue en premier ?*
— *Les deux adversaires peuvent-ils mourir simultanément (le 1er arrivant sur la dalle d'Anubis entraîne l'autre) ?*
— *Chaque adversaire connaît-il la position de l'autre ?*
— *Qu'entend-on par l'effondrement des dalles se situant au Sud-Ouest : dalles de la diagonale ou toutes les dalles se trouvant au sud et à l'est ?*
— *Peut-on se placer sur la même dalle que l'adversaire ?*

Problème de l'artiste

— *Que se passe-t-il chaque fois qu'un clou est ajouté ?*
— *Une fois le nombre de clous était fixé, doit-il y avoir des intersections doubles triples ou plus ?*
— *Entre deux points très proches peut-on toujours insérer d'autres points en agrandissant l'échelle ?*

Cette phase de questions correspond à l'appropriation du problème dans la démarche d'investigation et permet aux élèves de prendre conscience de la nécessité de faire des choix pour s'engager dans un processus de résolution mathématique.

La relance

Le groupe ResCo suit les échanges de questions-réponses de manière à pouvoir rédiger

Bonjour à tous et à toutes,

Dans toutes les classes, vous avez déjà bien travaillé sur le problème de l'Artiste que nous vous avons proposé et plusieurs pistes possibles ont été envisagées.

On voudrait pouvoir donner une réponse précise à l'Artiste afin de l'aider à faire ses choix pour réaliser son œuvre.

Pour cela, on se propose de traiter mathématiquement le Problème de l'Artiste.

Dans ce but, je vous propose de considérer que :

1. Le nombre de couleurs est le nombre de zones.

2. On cherche une solution générale, c'est-à-dire qu'on cherche le nombre maximum de zones en fonction du nombre de clous.

3. Le support de l'œuvre est un disque et les clous sont répartis sur sa circonférence.

4. La taille du support est suffisante pour que l'on puisse négliger la taille des clous et l'épaisseur des fils. Par conséquent, on assimile les clous à des points, et les fils tendus à des segments de droite.

Je vous souhaite à tous et à toutes une très bonne poursuite de la recherche.

Viviane DURAND-GUERRIER Université Montpellier 2 Département de Mathématiques

une relance adéquate. Cette relance, signée par l'enseignant-chercheur, fixe les choix et vise à orienter la recherche vers un problème mathématique commun, en prenant en compte les échanges des élèves.

Pour la dalle d'Anubis, la question récurrente « du suicide possible » a conduit le groupe ResCo à modifier le problème initialement prévu. En effet, suite à la question « *Les deux adversaires peuvent-ils mourir simultanément (le 1er arrivant sur la dalle d'Anubis entraîne l'autre) ?* », nous avons choisi dans la relance d'éliminer ce cas de figure en imposant que « *Quand un joueur s'arrête sur la dalle d'Anubis, il perd et aucune dalle ne s'effondre. De plus toutes les dalles effondrées remontent, ce qui permet au gagnant de sortir.* » (Voir le texte intégral de la relance en annexe 1)

Pour le problème de l'artiste, le choix, fait dans la relance, de s'intéresser au nombre maximum de zones permet de se placer dans le cas d'une relation fonctionnelle entre le nombre de points sur le cercle et le nombre maximum de zones. Sans cette précision, le nombre de zones dépend de deux paramètres : nombre de points sur le cercle et nombre de points de concours entre les cordes. La relance permet également d'expliciter les choix de mathématisation, en relation avec les questions posées par les élèves.

Ainsi, dans le cadre d'une fiction réaliste, les solutions sont liées aux choix initiaux ; elles peuvent être partielles ou incomplètes, mais valorisent les démarches de recherche, et elles permettent de mettre en valeur les apports du travail mathématique comme l'aide à la décision.

Les allers-retours entre objets réels de la fiction réaliste et objets mathématiques sont l'occasion d'aborder les aspects de la discipline liés à la démarche d'investigation qui sont explicitement dans les programmes et de modifier la représentation de la discipline chez les élèves.

Quelques indicateurs de l'appropriation du problème dans la phase de recherche

La phase de résolution occupe une part importante dans la recherche collaborative, donne lieu à des débats animés et mobilise l'ensemble des élèves. Une participation active des élèves est à souligner même de ceux qui habituellement en difficulté ne sont guère productifs. Il arrive parfois que des idées de stratégies ou les prémisses de conjectures apparaissent dès la première séance, mais elles restent assez rares car les élèves ont en général bien intégré le calendrier imposé pour la recherche et réservent leurs idées pour les séances suivantes.

Les conjectures sont étayées et illustrées par :

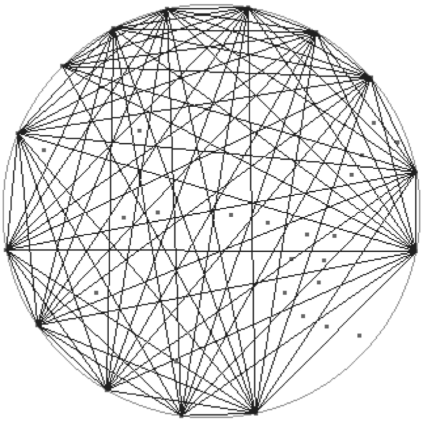
1. *des calculs :*

Groupe 1 :

Nombres de clous	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Nombre de zones	*1*	*2*	*4*	*8*	*16*	*30*	*56*	*88*

Le résultat double jusqu'à 5 clous, après ça change.

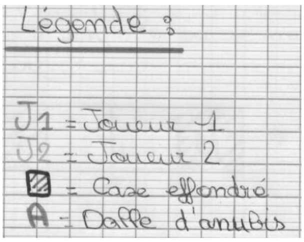
2. *des schémas et des figures construites parfois avec des logiciels de géométrie dynamique :*

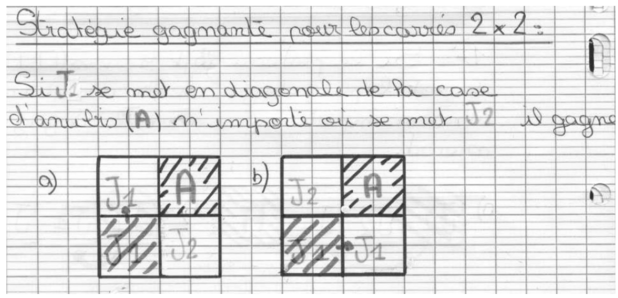


Ma règle :
Il y a 14 clous
et 14 fils qui
partent de
chaque clous

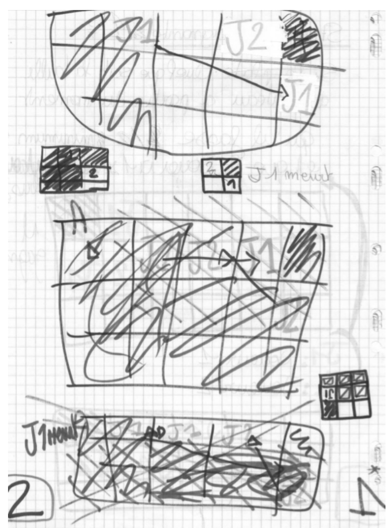
Je pense qu'il y a 105 zones parce
que 14
+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1
=105

On y découvre de réelles prises d'initiative, certains élèves n'hésitent pas à inventer leur propre vocabulaire ou notations et leur propre codage pour expliquer leurs schémas :

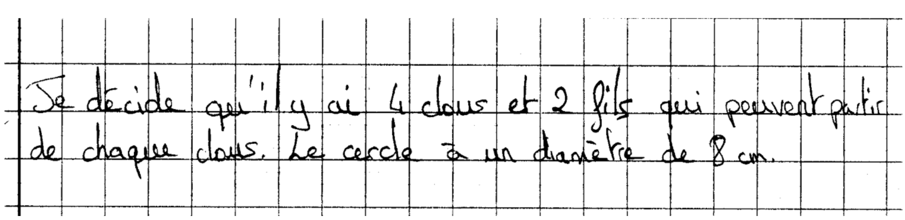




Il est intéressant dans cet exemple de voir d'après les « brouillons » de l'élève le cheminement vers le choix du codage :



Certains élèves s'imposent des règles pour pouvoir mener leurs premiers calculs :



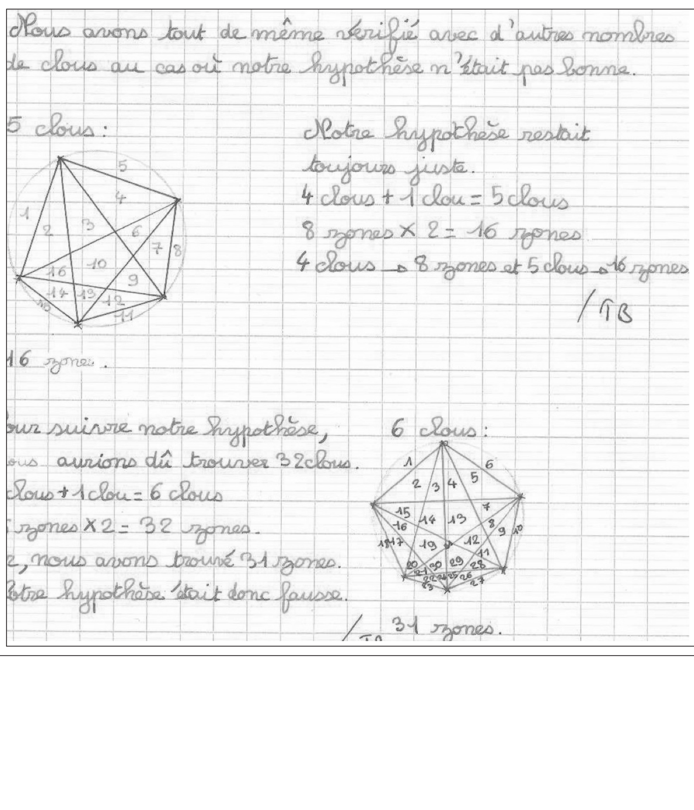
Je décide qu'il y ai 4 clous et 2 fils qui peuvent partir de chaque clous. Le cercle à un diamètre de 8 cm.

Cependant ces règles ayant un caractère *ad hoc* peuvent être un obstacle à la généralisation :

> *"…Un élève pense que l'on ne peut pas prendre un nombre de points énorme car on ne verra plus rien sur le dessin; ce sera illisible et on ne pourra plus compter."*
>
> *"La taille du support est inconnue mais ce n'est pas important pour la suite. Si le support rétrécie ou s'élargie, on ne change pas le nombre de zones."*

A travers d'autres productions, on voit que les élèves arrivent à formuler des hypothèses explicites et à reconnaître leur statut de conjectures, n'hésitant pas à les rejeter en argumentant :

> Groupe 7 :
> 3 clous : 4 zones
> 4 clous : 8 zones
> 5 clous : 16 zones
> 6 clous : 31 zones
> Nous pensions donc, après avoir trouvé les trois premiers résultats, qu'en ajoutant 1 clou, le nombre de zones doublait. Mais en trouvant le quatrième résultat et en appliquant cette règle à d'autres nombres de clous, nous comprîmes que notre théorie ne tenait pas debout.
> En effet, après différents calculs, 10 clous auraient dû donner 512 zones, et nous en avions trouvé environ 230.



Nous avons tout de même vérifié avec d'autres nombres de clous au cas où notre hypothèse n'était pas bonne.

5 clous :

16 zones.

Notre hypothèse restait toujours juste.
4 clous + 1 clou = 5 clous
8 zones × 2 = 16 zones
4 clous → 8 zones et 5 clous → 16 zones

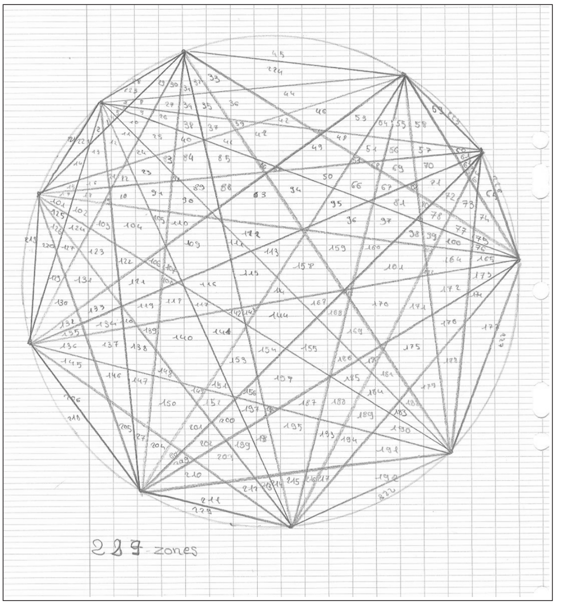
/TB

…ur suivre notre hypothèse,
…ous aurions dû trouver 32clous.
…lous + 1 clou = 6 clous
…zones × 2 = 32 zones.
…e, nous avons trouvé 31 zones.
…otre hypothèse était donc fausse.

6 clous :

31 zones.

Ils perçoivent aussi les limites des méthodes effectives : les calculs et les exemples concrets, aussi exhaustifs soient-ils, ne sont pas des preuves efficaces, mais ils sont des moyens pour aller de l'intuition vers la théorie. Voici un exemple de recherche assez fastidieux mais d'un intérêt limité :



Les élèves apprennent aussi qu'à partir d'un problème initial peuvent apparaître des questions ou problèmes annexes, certains devenant ensuite des sous-problèmes :

<u>Groupe 4 :</u>
Nous avons démontré qu'avec le nombre de points, nous pouvons trouver le nombre de segments maximum entre les points, voici la technique :
7 points : 1+2+3+4+5+6+7 = 28 fils
6 points : 1+2+3+4+5+6 = 21 fils
Nous pensions que le nombre de parties s'obtenait en multipliant le nombre de fils par 2, mais c'est faux :
2 points : 2 parties
3 points : 4 parties
4 points : 8 parties
5 points : 16 parties
mais pour 6 points, il n'y a que 30 parties.
Maintenant, nous réfléchissons pour trouver une technique afin d'obtenir le nombre de partie grâce au nombre de fils.

<u>Groupe 5 :</u>
Avec 6 clous, il y avait 15 segments (5+4+3+2+1) et 30 zones. Mais avec 4 points, il y avait 6 segments et 8 zones. Donc la solution n'est pas : zone = segment × 2

Cette liste d'indicateurs n'est pas exhaustive. On peut trouver d'autres éléments sur le site du groupe ResCo.

Notions et compétences mathématiques

A l'issue des recherches, un bilan est établi sur les notions mathématiques travaillées ainsi que sur les compétences développées par les élèves, que l'on retrouve souvent dans les dispositifs de mise en pratique des problèmes de recherche :

— Le raisonnement déductif ;

— Les méthodes heuristiques : essais, erreurs, conjectures, contre-exemples. Trouver un contre-exemple pour invalider une conjecture ;

— La démarche expérimentale :
- prouver en essayant tous les cas possibles (méthode exhaustive) ;
- tester la validité d'un argument valable dans un cas particulier en essayant dans un cas plus général ;
- réduire un problème à des cas particuliers plus simples pour s'approprier le problème et conjecturer une solution générale ;
- trouver un contre-exemple pour invalider une conjecture simple ;

— L'anticipation (par exemple : prévoir les futures dalles effondrées, vol de stratégie… dans les problèmes de la dalle d'Anubis) ; l'anticipation d'une configuration ;

— Le statut du contre-exemple.

5. — Contribution de ce dispositif à l'intégration de la démarche d'investigation dans la classe

En vivant une recherche collaborative, les enseignants sont amenés à modifier leurs pratiques. Ce changement de posture peut être parfois déroutant, et peut leur donner l'impression de se mettre en danger : il faut accepter de commencer une séance sans savoir exactement ce qui va être produit, car il est essentiel que les élèves ne soient pas trop guidés.

La créativité et l'inventivité mathématique développées dans les problèmes de recherche modifient l'image des mathématiques chez les élèves et les professeurs.

Le groupe ResCo a proposé deux questionnaires : l'un pour les enseignants sur les changements dans leurs pratiques et sur leur perception de l'évolution du travail de leurs élèves ; et l'autre pour les élèves, sur l'image qu'ils ont des mathématiques.

L'évolution des pratiques des enseignants :

— Ils laissent plus de place au questionnement des élèves :

« J'ai toujours été attentive à ce que mes élèves questionnent les énoncés et les exercices qui leur sont proposés. Ma participation à cette résolution m'a confortée dans cette démarche et je suis peut-être encore plus ouverte à tout type de questions. »

— Ils permettent des prises d'initiatives plus importantes à leurs élèves :

« J'ai participé à la résolution collaborative sur la dalle d'Anubis. Suite à cela je n'ai pas proposé d'autre problème ouvert mais j'ai essayé d'accorder un peu plus de liberté d'organisation et de parole à mes

élèves lors des activités de recherche (placement, constitution des groupes, parole...). (…) J'ai été surpris de toutes les questions qu'ils ont trouvées à poser sur la dalle d'Anubis... »

— Ils font travailler plus régulièrement les élèves en groupe sur des problèmes ouverts :

« J'ai surtout réutilisé la méthode de retour par affiches présentée lors du stage, que je trouve très motivante pour les élèves, et que j'ai pratiquée trois fois cette année je crois. D'ailleurs d'autres collègues s'y sont mis aussi, et certaines résolutions de problèmes sont affichées dans nos salles. »

« J'ai tenté quelques mises en pratiques, avec des situations de travail en groupe, et notamment proposé un travail (recherche en classe et narration de recherche) en 4ème sur «le problème du désert». »

— Ils créent « localement » leurs propres sessions de résolution collaborative :

« J'ai participé à un stage, puis j'ai mis en place de nombreuses résolutions collaboratives (parfois en échangeant sur le site, parfois en échangeant avec d'autres collègues hors du canal et parfois en faisant échanger deux de mes classes).

— Certains enseignants ont complètement intégré et pérennisé le dispositif de résolution collaborative de problème dans leur progression annuelle et sont devenus des « habitués ». C'est devenu un moment « officiel », un rituel dans l'année scolaire :

« J'ai fait présenter le problème par mes élèves aux autres élèves de l'établissement lors d'une journée «cultures» pendant laquelle les élèves présentent quelques moments marquants de leur année scolaire. Ils ont fait jouer d'autres élèves à la dalle d'Anubis avec des plateaux plastifiés. Ils ont ainsi mieux cerné les différentes stratégies à mettre en place en fonction de leurs hypothèses de départ. Comme il s'agissait d'une classe de terminale, je n'ai pas pu exploiter autant que je le voulais ce travail, étant tenue ensuite par le programme en vue du baccalauréat. Je pense qu'ils ont mieux compris l'idée de problème ouvert qui n'attendait pas «la» solution mais plutôt des avancées progressives dans la résolution du problème.

Le fait d'échanger avec d'autres classes motive les élèves et les sujets proposés sont très pertinents. »

— Des enseignants ont vu évoluer les modalités de travail de leurs élèves :

« Là oui j'ai un gros changement. J'ai pu remarquer que les élèves aimaient travailler en groupes. (…) J'ai décidé de me lancer et d'installer ma classe en îlots. Nous travaillons donc en groupes à chaque heure de cours. (…) En tout cas la résolution collaborative s'inscrit parfaitement dans ce dispositif. »

L'impact du dispositif
sur l'image des mathématiques des élèves :

Pour certains, c'est la première fois qu'un problème leur «résiste». Habitués à trouver forcément la solution, cela leur donne une autre image de faire des mathématiques :

Les paramètres nécessaires sont manquants ou erronés.

Voici quelques réponses
significatives des élèves au questionnaire :

1°) As-tu aimé le travail en groupe ? Pourquoi ?

J'ai aimé le travail en groupe parce que ça change des ~~habituel~~ cours de math qu'on a au collège. Et c'est toujours intéressant de rencontrer de nouvelles personnes,

oui, car le travaille il y a plusieur propositions donc ont peut se corigé.

2°) D'après toi, quelles qualités sont nécessaires chez un élève pour ce genre de travail ?

Être autonome et sérieux.
Accepter les idées des autres

Savoir écouter les autres et ne pas hésiter à dire les choses quand on n'est pas d'accord.

3°) Quel est pour toi l'apport des échanges dans ta classe et avec les autres classes ?

Sa apporte des nouvelle idée qu'on connait pas de nouvelle astuces et technique de nouvelle choses interessant.

4°) Quels sont pour toi les points positifs de ce type de travail ?

Avoir l'esprit de groupe.

Sa peut voir quelles sont les méthodes des autres personnes.

5°) As-tu appris quelque chose dans ce travail ?

oui, dans la nature il y a des calcul.

d'ecoute parceque on doit s'ecouter entre nous pour y arriver

Conclusion

Depuis quelques années, le stage « Résolution collaborative de problèmes » a une place pérenne au PAF de l'académie de Montpellier, en outre le groupe ResCo a su lui faire prendre encore plus d'ampleur par la participation de classes d'enseignants hors académie et hors frontières et à travers la présentation des travaux du groupe au sein de congrès, colloques et séminaires (Ray & *al* 2012).

La contribution croissante des stagiaires sur inscription individuelle montre que les enseignants sont en demande de formation continue pour travailler sur la démarche d'investigation. Ils découvrent à travers la résolution collaborative une forme originale de travail dont les mots-clés sont échanges et recherches. Un tel travail peut créer ou relancer le dynamisme d'une classe en mettant les élèves face à une réelle démarche scientifique : expérimentation, algorithmisation, investigation, recherches de résultats…

L'utilisation d'une plateforme via Internet permet des échanges riches et variés entre les classes des divers établissements. Le travail collaboratif prend alors toute sa dimension. La durée et l'organisation de cette recherche collaborative en font des événements marquants pour les élèves. Les traces numérisées des échanges peuvent devenir des références tant pour les contenus mathématiques développés que pour les outils et méthodes investis.

Le site est la mémoire de ces travaux grâce notamment à la mise à disposition des ressources des problèmes traités les années antérieures. Il crée un lien avec la communauté d'enseignants et permet une diffusion inter académique du dispositif. Il renforce l'autonomie des enseignants en leur permettant d'organiser eux-mêmes des séquences de résolution collaborative, en mettant à leur disposition toute la logistique nécessaire.

Parallèlement au stage, ResCo travaille en partenariat avec l'IFE dans le cadre d'une collaboration avec l'équipe DREAM de l'IREM de Lyon qui a pris la suite du groupe EXPRIME (Ray et Virduci 2012). Les recherches s'orientent vers l'analyse des différentes démarches mises en œuvre par les élèves et vers une réflexion sur l'organisation du travail collaboratif en classe (groupes, ateliers, débat scientifique,...). Un intérêt tout particulier est porté aux connaissances mathématiques travaillées dans le cadre des résolutions de problèmes.

L'organisation des stages de formation continue dans le cadre du PAF, le développement du site et l'accueil de classes hors académie ont pour objectif de faire partager ces expériences et de diffuser la résolution collaborative de problèmes comme modalité de la mise en œuvre de la démarche d'investigation en classe.

Bibliographie

Arsac, G., Germain, G. & Mante, M. (1988). Problèmes ouverts et situation problème. Brochure Irem Lyon ;

Arsac, G. et Mante, M. (2007). Les pratiques du problème ouvert. CRDP, Lyon, Scéren édition ;

Bonafé, F., Chevalier, A., Combes, M.C. Deville, A., Dray, L., Robert, J.P., Sauter, M. (2002). Les Narrations de Recherche de l'école primaire au lycée. Coédition Irem de Montpellier, Apmep n°151 ;

Combes, M.C., Saumade, H., Sauter, M., Théret, D. (2004). « Cinq classes au pays de 9 et 11 ». *Bulletin de l'APMEP*, vol. 455, p. 829-846 ;

Ray B., Azziz S., Couderc G., Durand-Guerrier V., Saumade H., Sauter M., Virducci S.,

Yvain S. (2012) Recherche collaborative et démarche d'investigation : des mathématiques pour appréhender le réel, in Dorier J.L. et Coutat S. (Eds), Enseignement des mathématiques et contrat social Enjeux et défis pour le 21° siècle, Actes du colloque EMF 2012, Université de Genève.

Ray, B., Virduci, S. (2012). Des fictions réalistes pour engager les élèves dans la résolution d'un problème mathématique. Journées mathématiques IFE-ENS de Lyon 2012.

Ray, B. (2013). Les fictions réalistes : un outil pour favoriser la dévolution du processus de modélisation mathématique ? Mémoire de master de l'université de Montpellier : en ligne sur le site de l'IREM de Montpellier ;

Sauter, M. (2008). Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes. Repères Irem, n° 72, p. 25-45. Article en ligne sur le site de la revue.

Sitographie

Rapport PISA http://www.pisa.oecd.org/

ResCo: http://www.irem.univ-montp2.fr/Resolution-collaborative-de,96

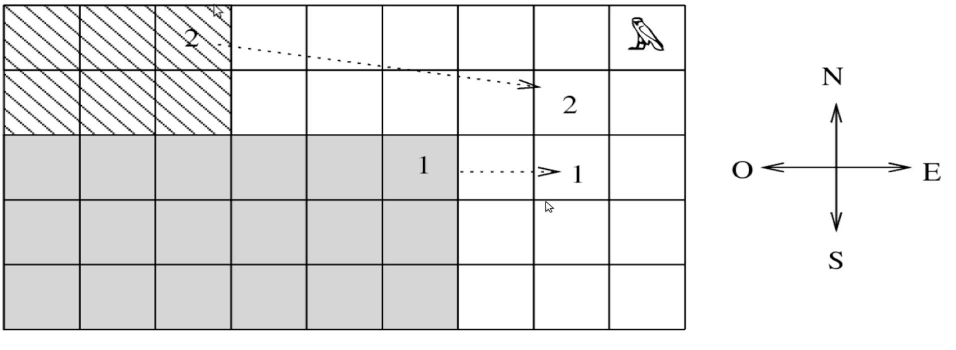
ANNEXE 1

Relance du problème de la dalle d'Anubis

Vous avez bien cherché le problème la dalle d'Anubis dans plus de 60 classes (environ 1 800 élèves).Vous vous êtes posé beaucoup de questions intéressantes. Pour traiter mathématiquement le problème, nous devons faire des choix. On supposera que :

1. La pièce est rectangulaire et les dalles sont des carrés identiques. Les points cardinaux sont indiqués dans la pièce.
2. Les deux joueurs ne peuvent pas être sur la même dalle.
3. Si un joueur est sur une case qui s'effondre, il perd. On ne peut pas marcher ni sauter au-dessus d'une dalle effondrée. Ainsi, un joueur peut perdre de 2 manières différentes : soit il s'arrête sur la dalle d'Anubis soit il se trouve sur une dalle qui s'effondre.
4. Chaque joueur peut se déplacer d'autant de dalles qu'il veut tant qu'il marche sur des dalles non effondrées.
5. On peut passer sur la dalle d'Anubis mais celui qui s'y arrête a perdu.
6. Quand un joueur s'arrête sur la dalle d'Anubis, il perd et aucune dalle ne s'effondre. De plus toutes les dalles effondrées remontent, ce qui permet au gagnant de sortir.
7. On ne peut pas passer son tour, on est obligé de se déplacer. On dispose d'autant de temps que l'on souhaite pour réfléchir.
8. On joue tant qu'un joueur n'a pas perdu.

La question qui a été le plus posée est : « quelles dalles s'effondrent ? » Voici un petit dessin pour illustrer la règle. On prend l'exemple d'une pièce rectangulaire de largeur 5 et longueur 9 (mais la pièce pourrait avoir d'autres dimensions). Le premier joueur, indiqué par 1, et le second joueur, indiqué par 2, se placent comme sur la figure ci-dessous. Quand le premier joueur se déplace pour aller sur sa nouvelle dalle, les dalles grisées s'effondrent. De même quand le joueur se déplace pour aller sur sa nouvelle dalle, les dalles hachurées s'effondrent.



Comme dans tout problème mathématique, je vous encourage à chercher une stratégie gagnante dans des cas plus simples.

Par exemple, si la pièce n'a qu'*une seule rangée* de dalles, ou si elle est de *forme carrée*, ou encore si elle n'a que *deux rangées* de dalles.

Vous pouvez imaginer d'autres cas et les traiter complètement avant de chercher le cas général.

Vous pourrez aussi vous poser des questions annexes : combien y a-t-il de configurations de jeu possibles si l'on se fixe les dimensions du rectangle ?

Bonne recherche, j'attends avec impatience vos nouvelles stratégies.

Etienne Mann *Maître de conférences à l'université de Montpellier 2*

ANNEXE 2

Solution du problème de la dalle d'Anubis

Le problème de la dalle d'Anubis est construit à partir de celui dit de la tablette de chocolat. En modifiant l'énoncé, on a modifié complètement le jeu et donc les stratégies. Ce type de problème appartient à la théorie des jeux.

Résultat théorique de l'existence d'une stratégie gagnante :

Nous appelons *stratégie gagnante* une suite de déplacement qui permettra au premier joueur de gagner quel que soit les déplacements de l'adversaire. Un résultat théorique est donné par le théorème de Zermelo.

Théorème : *Tout jeu à deux joueurs sans partie nulle a une stratégie gagnante.*

Corollaire du vol de stratégie : *Pour la dalle d'Anubis, le premier joueur a une stratégie gagnante. Sauf dans le cas d'une ligne ou colonne avec trois dalles.*

Démonstration. Par le théorème de Zermelo, nous savons que l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante. Supposons que c'est le second joueur. Ainsi, si le premier joueur se place sur la première dalle en bas à gauche, le second joueur a une stratégie gagnante c'est-à-dire qu'il se place sur une dalle, notée G, qui le fera gagner quel que soit les coups de l'adversaire. Du coup, nous en déduisons une stratégie gagnante pour le premier joueur en jouant sur cette fameuse dalle G et il va gagner sauf si nous avons une ligne ou colonne avec 3 dalles. Nous disons qu'il a volé la stratégie gagnante. CQFD

Le corollaire précédent nous donne un résultat théorique mais il ne nous dit pas comment trouver cette stratégie gagnante.

Trouver une stratégie gagnant via le graphe du jeu :

De manière générale, les problèmes de théorie des jeux peuvent se résoudre par des graphes. Ceci permet de décortiquer complètement le jeu.

Pour faire le graphe du jeu, on procède comme suit.

1. Nous dessinons toutes les configurations possibles : nous plaçons 1 (resp. 2) pour la position du premier (resp. second) joueur.
2. Nous mettons une flèche orientée entre le cas A et le cas B si après le déplacement du joueur 1, la configuration A devient B.
3. Une fois que nous avons fait tous les dessins, nous regardons les configurations finales c'est-à-dire celles où nous pouvons dire de façon évidente si le joueur noté 1 gagne ou perd. Après nous voulons savoir si une configuration donnée (pas forcément une configuration finale) dans le graphe est gagnante ou perdante (toujours pour le joueur 1). En partant d'une configuration finale, nous appliquons la règle suivante :
   a. Si d'une configuration, il existe une flèche vers une configuration perdante, alors la configuration est gagnante.
   b. Si d'une configuration, toutes les flèches vont vers des configurations gagnantes, alors la configuration est perdante.

Pour le cas 2 2, nous obtenons le graphe suivant d'où nous déduisons que le coup en diagonale pour le premier joueur est la stratégie gagnante.