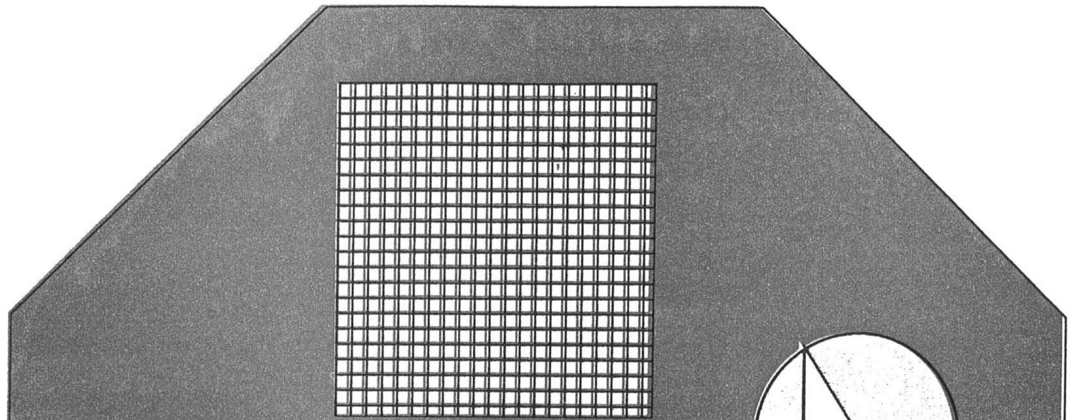
INSTITUT DE RECHERCHE SUR
L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Université Montpellier II

1

# LE CODAGE :
# Quand, Comment, Pourquoi ?



Groupe didactique



JUIN 1998

**INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES**

Université Montpellier II

Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER cedex 05
Tél : 04.67.14.33.83/33.84
Fax : 04.67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr

# LE CODAGE

## Quand, Comment, Pourquoi ?

*Groupe Didactique*

**JUIN 1998**

# Avant propos

Ce travail est le fruit d'une réflexion de tous les membres du groupe didactique de l'IREM de Montpellier.

Les recherches en didactique des mathématiques concernant le raisonnement déductif, le dessin et la figure en géométrie sont nombreuses et riches. Leur lecture nous a poussés à proposer aux enseignants par l'intermédiaire du plan académique de formation, des stages centrés sur l'apprentissage de la démonstration au collège. Tout au long de ces années, le contenu de ces stages s'est enrichi au fur et à mesure de l'avancée de nos recherches.

Durant plusieurs années, nous avons essayé d'être une courroie de transmission entre les chercheurs et les enseignants ce qui nous a amenés à construire, tester, analyser des activités et à concevoir des séances complètes de classe autour des thèmes centraux de géométrie de la classe de quatrième. Ces travaux vont faire l'objet d'une publication IREM en cours.

Ceci nous a conduits, tout naturellement, à une réflexion sur les codages d'un dessin en géométrie et sur le rôle que ces codages peuvent jouer dans la lecture mathématique d'un dessin et dans l'apprentissage du raisonnement déductif.

A travers cette recherche, nous avons pris conscience de l'importance de ces petits signes que l'on peut placer sur un dessin et de tous les problèmes que leur présence ou leur absence sur un dessin pouvait soulever. La prise de conscience de l'impact des codages sur l'apprentissage du raisonnement déductif et sur la compétence des élèves à lire mathématiquement un dessin nous a incités à regrouper nos réflexions sur les codages d'un dessin dans une publication séparée.

## *Membres du groupe didactique :*


Mme Nicole BELLARD

M. Alain BRONNER

M. Bernard CASENOVE

M. Yves GIRMENS

Mme Mirène LARGUIER

Mme Martine LEWILLION

Mme Elisabeth RÉBILLARD

Mme Sylvie PELLEQUER

M. Michel SECO

Mme Claudine VERGNE

# Sommaire


| | | |
|---|---|---|
| | Introduction | p. 3 |
| I | Qu'entend-on par codage des dessins ? | p. 6 |
| II | Quand apparaît le codage ? Pourquoi ? | p. 11 |
| III | Comment concevoir un enseignement prenant en compte les objectifs du codage d'un dessin | p. 13 |
| IV | Résumé | p. 25 |
| V | La figure à main levée | p. 26 |
| VI | Le quadrillage | p. 31 |
| VII | Quelques exercices : le codage comme objet d'apprentissage | p. 36 |
| VIII | Quelques exercices utilisant le codage comme outil pour l'apprentissage du raisonnement déductif | p. 40 |
| IX | Test : comment des élèves interprètent des codages | p. 45 |

## INTRODUCTION

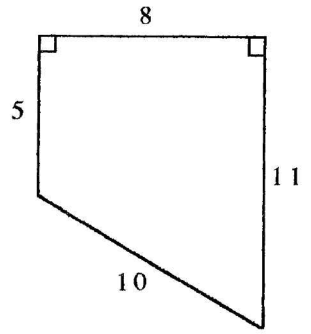
### a. Codage et évaluation

On peut constater à travers les livres scolaires et les pratiques des enseignants que les dessins géométriques sont généralement codés. Bien que les programmes officiels ne parlent pas du codage des dessins, certains exercices d'évaluations d'entrée en sixième ou en seconde font explicitement appel aux codages.

Par exemple, dans le cahier de l'évaluation sixième de 1995, on trouve l'exercice suivant :

Voici un modèle réduit de la figure que tu dois reproduire.

Les nombres indiquent les dimensions en centimètres que tu dois donner au dessin.



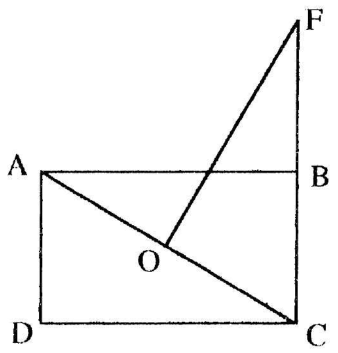

a) Quel sera le périmètre de la figure obtenue ? ................ cm

b) Fais le dessin avec des mesures exactes.

*Remarque* :

Il s'agit pour l'élève de prélever les informations données par le codage pour construire la figure en vraie grandeur.

Dans le cahier d'évaluation d'entrée en seconde 1996, on trouve l'exercice suivant :




A B C D est un rectangle de centre O.

La médiatrice du segment [AC] coupe la droite (AB) en E et la droite (BC) en F.

1) Traduire les hypothèses en codant la figure avec de la couleur.

2) Démontrer que les droites (CE) et (AF) sont perpendiculaires.

*Remarques* :

Il s'agit, pour l'élève, de placer des codages qui représentent les données fournies par l'énoncé, sur le dessin.

Il est intéressant de noter que certains élèves, à qui on n'a probablement jamais proposé ce type de tâche, ont colorié le dessin.

Le fait que les évaluations fassent appel au codage laisse à penser que les élèves ont eu l'occasion de rencontrer et de s'approprier des codages durant leur scolarité.

On peut se poser la question suivante :

**. Comment peut-on construire un enseignement intégrant l'apprentissage du codage d'un dessin ?**

## b. Codage et démonstration

Une figure codée peut faire l'objet de différents niveaux de lecture. Par exemple, comment un élève peut-il lire ce dessin codé ?


Il existe un certain nombre de lectures possibles qui s'appuient sur l'enseignement que l'élève a reçu concernant les codages et qui vont dépendre du niveau de connaissances mathématiques de cet élève.

Ainsi ce dessin peut être " décodé " de différentes façons :

BA = AC

A, B et C sont alignés

Dans chacun de ces deux cas, il s'agit pour l'élève d'une lecture incomplète du dessin codé.

AB = AC et A, B et C sont alignés

A est le milieu de [BC]

A est le centre de symétrie de [BC]

B est le point symétrique de C par la symétrie de centre A

C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle 180°

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$

B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport -1.

C est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$

Il est essentiel qu'un élève apprenne à prélever les informations fournies par les codages selon différents points de vue, de manière à être capable de choisir celui qui conviendra le mieux à un problème posé (en effet, face à un problème, tous les points de vue ne sont pas pertinents pour découvrir le "chemin" de la solution).

**On peut faire l'hypothèse que la capacité à décoder une figure de différentes manières sera un atout décisif pour l'apprentissage de la résolution d'un problème de géométrie.**

# I - QU'ENTEND-ON PAR CODAGE DES DESSINS ?

Cette question est à l'origine de notre publication. Pour mener à bien cette réflexion, il nous a paru indispensable de proposer une définition du codage d'un dessin.

## 1. Définition d'un codage

**En géométrie plane ou dans l'espace, nous appelons codage d'un dessin tout signe qui exprime une propriété de la figure.**

**Ces signes sont de plusieurs types :**

**. soit un signe ajouté aux traits constituant le dessin (exemples : signe de l'angle droit, mesure, coloriage, etc.) ;**

**. soit une qualité particulière du trait lui-même (exemples : couleur, épaisseur, pointillé, trait à main levée) ;**

**. soit un élément du dessin qui traduit une propriété implicite (exemples : appartenance ou non-appartenance d'un point à une ligne) ;**

**. soit la nature du support du dessin (exemples : quadrillage, papier à réseau pointé, papier millimétré).**

*Remarques :*

Pour nous, coder un dessin, c'est placer sur le dessin un signe qui traduit une information mathématique donnée dans l'énoncé.

Pour nous, décoder un dessin, c'est traduire en langage naturel (écrit ou oral) les informations signifiées par les codages.

## 2. Inventaire des codages élémentaires

Nous avons essayé de réaliser un inventaire des codages à partir des livres et des pratiques des enseignants.

Cet inventaire, qui ne prétend pas être exhaustif, amène à formuler les remarques suivantes :

- certains codages, dits généraux, sont unanimement utilisés
(bien que les limites de validité soient parfois nationales, comme le codage de l'angle droit qui, en Belgique, est le suivant  ).

- D'autres codages, dits locaux, sont variables en fonction du manuel ou du professeur (par exemple : le codage des droites parallèles ou celui des angles de même mesure).
En particulier, il arrive qu'un enseignant utilise, à des moments différents, divers codages pour une même propriété mathématique : le codage n'est donc pas défini de façon stable.

*Remarque :*

Cet inventaire n'entend établir ni une hiérarchie ni un classement.

Nous avons simplement regroupé :

- d'une part, des codages qui semblent utilisés par tous (colonne : utilisation générale)

- et, d'autre part, des codages qui ne sont utilisés que par certains enseignants ou certains livres (colonne : utilisation locale).

# I - QU'ENTEND-ON PAR CODAGE DES DESSINS ?

Cette question est à l'origine de notre publication. Pour mener à bien cette réflexion, il nous a paru indispensable de proposer une définition du codage d'un dessin.

## 1. Définition d'un codage

**En géométrie plane ou dans l'espace, nous appelons codage d'un dessin tout signe qui exprime une propriété de la figure.**

**Ces signes sont de plusieurs types :**

**. soit un signe ajouté aux traits constituant le dessin (exemples : signe de l'angle droit, mesure, coloriage, etc.) ;**

**. soit une qualité particulière du trait lui-même (exemples : couleur, épaisseur, pointillé, trait à main levée) ;**

**. soit un élément du dessin qui traduit une propriété implicite (exemples : appartenance ou non-appartenance d'un point à une ligne) ;**

**. soit la nature du support du dessin (exemples : quadrillage, papier à réseau pointé, papier millimétré).**

*Remarques :*

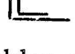
Pour nous, coder un dessin, c'est placer sur le dessin un signe qui traduit une information mathématique donnée dans l'énoncé.

Pour nous, décoder un dessin, c'est traduire en langage naturel (écrit ou oral) les informations signifiées par les codages.

## 2. Inventaire des codages élémentaires

Nous avons essayé de réaliser un inventaire des codages à partir des livres et des pratiques des enseignants.

Cet inventaire, qui ne prétend pas être exhaustif, amène à formuler les remarques suivantes :

- certains codages, dits généraux, sont unanimement utilisés (bien que les limites de validité soient parfois nationales, comme le codage de l'angle droit qui, en Belgique, est le suivant  ).

- D'autres codages, dits locaux, sont variables en fonction du manuel ou du professeur (par exemple : le codage des droites parallèles ou celui des angles de même mesure). En particulier, il arrive qu'un enseignant utilise, à des moments différents, divers codages pour une même propriété mathématique : le codage n'est donc pas défini de façon stable.

*Remarque :*

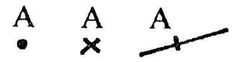
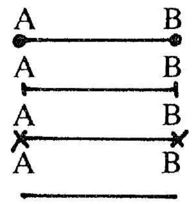
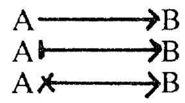
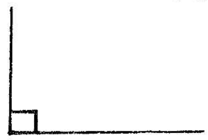
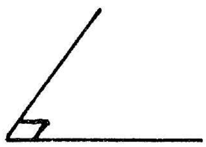
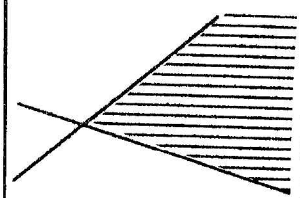
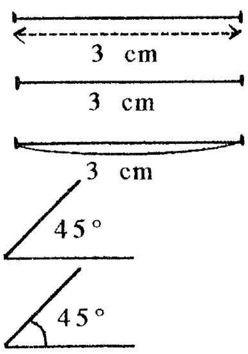
Cet inventaire n'entend établir ni une hiérarchie ni un classement.

Nous avons simplement regroupé :

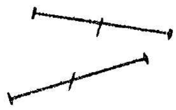
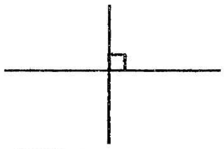
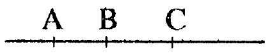
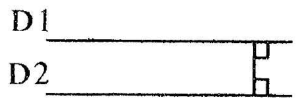
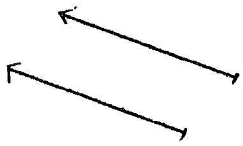
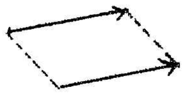
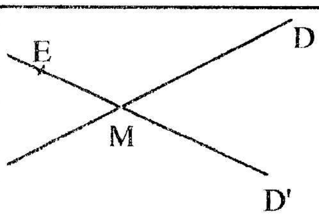
- d'une part, des codages qui semblent utilisés par tous (colonne : utilisation générale)

- et, d'autre part, des codages qui ne sont utilisés que par certains enseignants ou certains livres (colonne : utilisation locale).

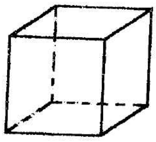
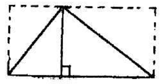
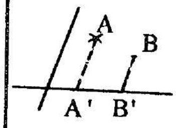
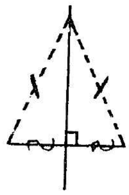
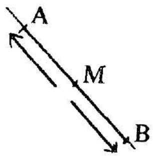
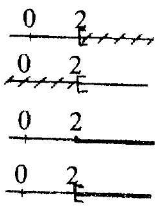
## 1.1 Utilisation générale — Utilisation locale

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | un point A |  |
| | | un segment [AB] |  |
| | | un vecteur $\overrightarrow{AB}$ |  |
| Un angle droit<br><br>Un angle droit en perspective | <br> | | |
| Le sens de rotation |  | | |
| | | une surface : coloriage ou hachures, etc. |  |
| Les mesures<br>d'un segment | | d'un angle<br>(autre codage, le coloriage) |  |

## 1.2 Utilisation générale — Utilisation locale

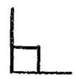
| Utilisation générale | | Utilisation locale | |
|---|---|---|---|
| Segment de même longueur signes utilisés : / , // , ∿, o , etc. |  | | |
| Droites perpendiculaires |  | | |
| | | angles de même mesure : codage avec le même signe etc. ou avec la même couleur |   |
| Points alignés | | |   |
| | | droites parallèles codages avec : la même couleur ou en épaississant le trait ou avec une perpendiculaire |     |
| | | vecteurs égaux codage avec : la même couleur ou quadrilatère à lire comme un parallélogramme |   |
| Point défini par : appartenance à une courbe ou intersection de deux courbes |   | | |

## 1.3 Utilisation générale — Utilisation locale

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | lignes cachées dans une figure en perspective |  | lignes ajoutées pour compléter une figure |  |
| | | | lignes auxiliaires : codage en pointillé ou en trait fin |   |
| **à propos de l'utilisation des pointillés** | | | une propriété qui a le statut de conclusion |  |
| | | | éléments mobiles codage avec :<br>une couleur<br>ou<br>des flèches |  |
| | | | un intervalle par exemple :<br>[2 ; +∞ [ |  |
| | un quadrillage |  | | |

# II - QUAND APPARAIT LE CODAGE ? POURQUOI ?

## 1. A l'école primaire

Un des codages le plus utilisé est le codage de l'angle droit : "  ".

Il apparaît surtout, après la découverte de l'angle droit, dans le résumé qui fixe ce que les élèves doivent retenir.

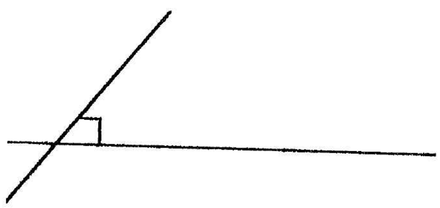
Le signe choisi afin de visualiser l'angle droit fait apparaître "un petit carré" qui peut-être perçu comme une icône ayant pour but de provoquer chez l'enfant l'association entre "angle droit" et "carré" : il semble donc que l'utilisation de ce signe vise surtout à favoriser une *mémorisation de l'angle droit* par référence au carré et cela afin de *favoriser la reconnaissance visuelle de l'angle droit.*

L'angle droit permettant de définir deux droites perpendiculaires, le codage sera vite lu en terme de "droites perpendiculaires".

On peut cependant se demander si l'utilisation de ce codage, au moment où l'on introduit l'angle droit (en CE1), est porteuse de sens pour l'élève, compte-tenu du fait que celui-ci n'est en général pas introduit par référence au carré et que le rapprochement avec ce dernier, qui ne peut être fait que lors de l'étude des propriétés du carré, ne sera pas forcément explicité.

D'ailleurs, au vu de certaines productions, il semble que des élèves croient que c'est le codage qui, à lui seul, assure et valide la présence d'un angle droit : cela pose la question de l'opportunité de l'introduction d'un tel codage, à ce moment là, et aussi la question des modalités de son utilisation.

Voici, par exemple, ce qu'un élève de sixième a produit en réponse à la consigne : "*Construis deux droites perpendiculaires*" :



D'autres codages (longueurs égales...) apparaissent parfois de manière marginale mais on note **qu'à l'école :**

1. **le codage est très peu ou pas du tout utilisé dans les tâches proposées aux élèves.**
2. **le codage utilisé est attaché au dessin ; ainsi le code visualise une propriété :**

   **. que l'on peut vérifier sur le dessin donné à l'élève**

   **. ou que l'élève construit à l'aide des instruments.**

## 2. Au collège

Dans les ouvrages de sixième et de cinquième, on observe que *la pratique du codage se fait de manière très inégale et incohérente*, par exemple :

- sur tel dessin, certaines propriétés sont signifiées par un code, d'autres sont à y prélever l'aide d'instruments ;
- sur tel autre dessin, le codage communique des propriétés en complément d'un texte ou en remplacement d'un texte, voire en redondance avec le texte.

*Il paraît difficile, au vu des pratiques observées dans les manuels, de définir un statut clair du codage et de cerner un rapport cohérent entre le codage et le dessin géométrique.*

Compte-tenu du fait que, sur un *dessin codé*, on peut prélever *deux sortes d'informations concurrentes*, celles qui sont fournies par les codes et celles que l'on peut obtenir par la mesure ou la vue, **ne serait-il pas opportun de décider, dès la première année de collège, de faire du codage un outil privilégié pour amener l'élève à modifier son rapport au dessin géométrique et le faire accéder au concept de figure géométrique ?**

Si l'on fait ce choix, il est nécessaire de définir un statut clair du codage et de le communiquer aux élèves à l'aide de travaux appropriés.

**On peut ainsi définir les codes portés sur un dessin comme des signes qui indiquent les propriétés qui sont données pour vraies, indépendamment de toute vérification que l'on peut faire à l'aide d'instruments.**

A partir de là, le codage doit permettre à l'élève *d'acquérir un autre regard sur le dessin* en s'intéressant à **l'objet défini par les propriétés signifiées par les codes.**

**Ainsi l'élève peut entretenir un double regard sur un dessin géométrique :**

- **la perception par la vue et par l'usage d'instruments qui se rapportent au dessin**
- **la perception par les codes qui se rapportent à l'objet mathématique appelé figure.**

De cette façon, lorsqu'une figure est donnée à l'aide d'un énoncé en langue naturelle, les seuls codes à porter sur le dessin correspondant sont ceux qui traduisent les informations fournies par l'énoncé : cela favorise "l'appréhension discursive" d'une figure [R. DUVAL, 1988].

Dans le rapport à la figure engendré par le codage, **c'est seulement ce qui est codé qui doit être tenu pour vrai** : ainsi une propriété, qu'un dessin très précis fait apparaître mais qui n'est pas codée, ne peut pas être considérée comme vraie : elle pourra alors seulement donner lieu à une conjecture.

# III - COMMENT CONCEVOIR UN ENSEIGNEMENT PRENANT EN COMPTE LES OBJECTIFS DU CODAGE D'UN DESSIN ?

## 1. Hypothèses

**En premier lieu**, le codage, en intégrant au dessin les propriétés mathématiques de la figure, modifie la vision que l'élève a du dessin : il perçoit la figure mathématique à travers le dessin.

**En second lieu**, puisqu'il visualise des données, le codage permet soit de se passer d'un texte fournissant les données soit d'éviter de faire des allers et retours incessants entre un dessin et un texte fournissant les données : en cela, il constitue un moyen efficace de communication tant pour soi que pour les autres. Ainsi, dans la recherche d'un problème, le codage contribue, le plus souvent, à alléger la mémoire de travail.

**En outre**, comme nous le montrerons plus loin, le codage peut contribuer, si l'élève sait le lire de manière appropriée, à le mettre sur la voie pour trouver la solution à un problème.

On comprend aisément, une fois ces enjeux identifiés, qu'il n'est pas possible de laisser à la charge de l'élève, l'apprentissage du codage, au coup par coup, au gré des exercices rencontrés : il est donc nécessaire que le codage d'un dessin fasse l'objet d'un enseignement explicite et cohérent qui, commençant en sixième, se poursuivra sur toutes les années de collège, voire au-delà.

Cela suppose que, dans son enseignement, le professeur s'attache à définir clairement les codages (normalisés ou locaux) qu'il va utiliser ainsi que les règles d'utilisation de ces codages.

**Ainsi, l'apprentissage du codage d'un dessin va se faire selon deux axes :**

**comme objet à connaître pour lui-même avec ses signes, ses règles et ses limites,**

**comme outil à utiliser dans l'apprentissage du raisonnement déductif.**

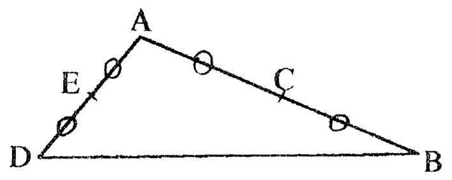
## 2. Un apprentissage explicite des codages et de leurs règles en liaison avec les propriétés mathématiques qu'ils "visualisent".

### a) Les codages et leur mise en œuvre

**Le premier niveau d'apprentissage** va être de relier le codage à la propriété mathématique qu'il permet de visualiser sur un dessin. Il s'agira, pour l'élève, chaque fois qu'il fera un dessin en utilisant une propriété mathématique, d'apprendre le ou les codages associés et de systématiquement le ou les porter sur le dessin.

Par exemple, chaque fois qu'un énoncé enjoint à l'élève de construire deux droites perpendiculaires, l'élève, une fois le dessin réalisé, marquera le codage associé sur le dessin ; il fera de même chaque fois qu'il construira des segments de même longueur...

*Remarque :*

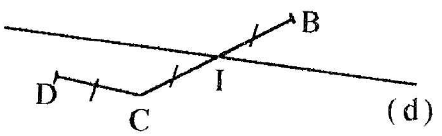



A propos de figures comportant plusieurs milieux, on rencontre fréquemment des erreurs de codages comme ci-contre alors que les longueurs AB et AD sont différentes.
Il convient d'alerter les élèves de façon à les rendre vigilants sur les principes du codage.

**Le deuxième niveau d'apprentissage** va amener l'élève à concevoir le codage d'un dessin comme un moyen permettant le passage entre deux langages présents en géométrie. L'enseignant doit donc construire des exercices permettant aux élèves d'apprendre :

- le passage de la langue naturelle au dessin codé : à partir d'un énoncé texte, coder un dessin (exemple : voir fiche 1) ;
- le passage d'un dessin codé à un texte en langue naturelle : à partir d'un dessin codé, écrire les informations dont on est sûr grâce aux codages.

*Exemple* : "*Voici une figure, de quelles informations es-tu sûr ?*"




Voici des réponses possibles d'élèves à cet exercice :

DC = CI = IB

I milieu de [BC]

I, C et B sont trois points alignés

La droite (d) coupe le segment [BC] en son milieu

B et C sont de part et d'autre de (d).

Le premier passage pose les problèmes de :

- choix du codage le plus utile
- existence ou non d'un codage
- coexistence entre les codages.

Et le deuxième passage est difficile car les élèves ont tendance à lire, non seulement les informations codées, mais aussi toutes celles qu'ils "voient" sur la figure.

L'enseignant doit être attentif aux erreurs liées à cette activité car, par exemple, il semble que pour beaucoup d'élèves de sixième, le codage classique " // " qui exprime que deux segments sont de même longueur soit souvent interprété comme indiquant deux droites parallèles.

On peut expliquer cela par le fait que l'élève a appris le symbole "//" comme signifiant "est parallèle à" dans le registre de l'écrit et qu'il est tenté de le transférer dans le registre graphique, avec le même sens. Cet effet est, sans doute, renforcé quand les supports des deux segments semblent parallèles.

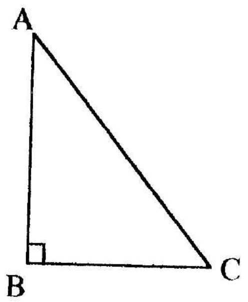
Il est peut-être judicieux, en début d'apprentissage, d'éviter ce type de codage (//) pour indiquer des longueurs égales de façon à éviter les confusions.

**Un autre aspect**, tout aussi important à enseigner, est l'interprétation d'un codage sous divers points de vue qui vont se compléter au fur et à mesure de l'acquisition des connaissances mathématiques.

On sait bien que, suivant l'interprétation choisie, la découverte de la solution d'un problème faisant intervenir cette figure va être plus ou moins favorisée.

**L'apprentissage, pour un même codage, de différentes lectures mathématiques est donc indispensable pour améliorer la capacité d'un élève à développer une heuristique.**

*Exemple* :




Ce codage permet de prélever sur la figure les différentes informations suivantes :

- ABC est un angle droit
- ABC = 90°
- Les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires
- le triangle ABC est rectangle en B
- (AB) est la hauteur issue de A du triangle ABC
- (BC) est la hauteur issue de C du triangle ABC.

Chacune de ces lectures peut déclencher une stratégie spécifique dans le cadre de la recherche de la solution d'un problème.

Les travaux proposés, tout au long du cursus scolaire, en parallèle avec les apprentissages mathématiques, dans le but de permettre aux élèves de s'approprier les codages, de savoir les placer sur un dessin et de savoir les lire, amènent à se poser la question suivante :

*"Quand va-t-on pouvoir placer un codage sur un dessin ?"*

**On décide de placer le codage associé à une propriété sur un dessin, chaque fois que cette propriété est donnée dans l'énoncé d'un problème.**

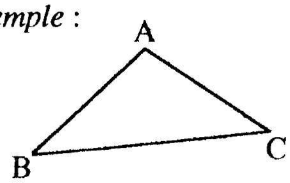
En pratique, à partir des exercices qui ont été travaillés dans la classe, l'objectif est de mettre en évidence des règles que les élèves peuvent, par exemple, formuler de la façon suivante et écrire dans leurs cahiers :

**"quand j'utilise une propriété donnée pour faire une construction, je peux placer le codage associé sur le dessin"**

*Exemple* : deux droites parallèles ou deux longueurs égales.

**"quand je lis une propriété dans l'énoncé d'un problème, je peux placer le codage associé sur le dessin"**

*exemple* :




*ABC est un triangle isocèle.*

En présence de l'exercice ci-contre, l'élève doit se dire : "Je peux coder l'égalité des deux longueurs AB et AC".

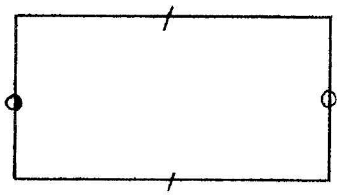
## b) Des règles de fonctionnement du codage

Pour mener à bien l'apprentissage des codages, il est nécessaire de construire un enseignement qui permette aux élèves de s'approprier **un certain nombre de règles de fonctionnement des codages** qu'il est **essentiel d'expliciter avec eux et de leur faire écrire dans le cahier.**

Voici les quatre règles que nous avons dégagées :

### 1. Le codage prime sur la forme de la figure

*Exemple* :

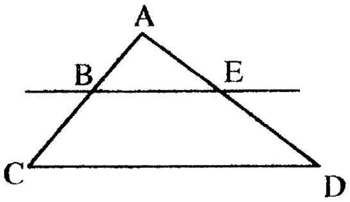


Bien que la forme évoque le rectangle, on sait seulement que les côtés opposés ont la même longueur.

*Remarque* :

**Le problème posé par la lecture des points alignés sur un dessin est essentiel.**

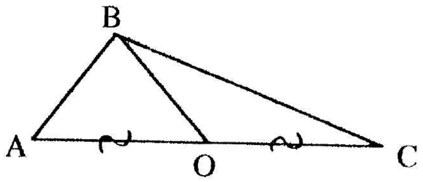
**Peut-on prélever systématiquement l'alignement des points, sur un dessin ?**




Il est communément admis que sur un dessin fait à l'aide de la règle, comme celui ci-contre on peut prélever l'information :
"A, B et C sont alignés, de même que A, E et D".

Autrement dit, si une droite définie par deux points est coupée par une autre droite, cela détermine automatiquement trois points alignés.

Ainsi, avec le dessin ci-dessous, on conclut que A, O et C sont alignés car aucun autre codage ne s'y oppose.

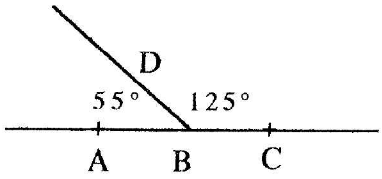


Dans ces deux exemples, *le codage des points alignés fourni par le dessin est indiscutable.*

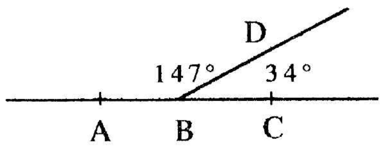
Mais que dire de l'exercice suivant ?

*Pour chaque figure, est-ce que les points A, B et C sont alignés ?*

a)




b)




Pour le dessin b) comment gérer ces contradictions ?
Il y a opposition entre l'information du codage des points alignés fournie par le dessin et l'information du codage des angles.

Il faut donc enseigner à nos élèves que :

**Dans un dessin, quand il y a opposition entre deux informations, l'une fournie par un codage constitué par les tracés du dessin, l'autre fournie par un codage constitué de signes ajoutés aux tracés du dessin, c'est toujours l'information donnée par les codages ajoutés au dessin qui prime.**

On peut, par exemple, faire écrire dans le cahier des élèves la règle suivante :

> **"Une information donnée par un codage "ajouté" sur le dessin l'emporte sur une information donnée par un codage lié au tracé du dessin".**

Ce qui nous permet de conclure que, dans le dessin b) de l'exercice précédent, les points ne sont pas alignés.

## 2. Le codage du "probable" et du "possible" sur un dessin est interdit

En effet, le codage met en évidence sur un dessin, seulement ce qui doit être tenu pour vrai.

*Exemple* : A partir de l'énoncé suivant :

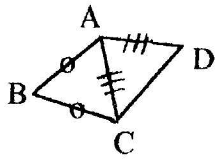
> *"Trace un segment [AB] de 6 cm. Place le milieu I du segment [AB]. Trace la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par I.*
>
> *Sur cette perpendiculaire, de part et d'autre de I, place les points C et D tels que IC = ID = 3cm . Trace le quadrilatère ACBD".*

Sur le dessin final, les informations "côtés de même longueur et angles droits" du quadrilatère ainsi obtenu ne doivent pas être codées car elles ne sont pas fournies par l'énoncé.

De cette façon, dès les premières années du collège, l'élève est amené à dissocier ce qu'il sait par l'énoncé de ce qu'il perçoit par le dessin, et nous savons que cela constitue un préalable nécessaire à la compréhension du raisonnement déductif.

**3. Deux codages différents de longueurs ne veulent pas dire forcément que ces longueurs sont différentes (de même pour les angles)**

*Exemple* :

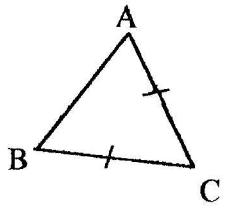



*Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.*

Les longueurs AB et AC sont codées différemment, la démonstration permettra de dire qu'elles sont égales.

**4. Un dessin codé ne donne pas toutes les propriétés possibles de la figure**

*Exemple* :




Le codage indique deux côtés de même longueur mais ne donne aucune information sur le troisième côté : on ne sait pas si le triangle est équilatéral.
Il n'est pas interdit qu'il le soit, mais cela ne peut pas être pris en compte.

## c) Différents niveaux de lecture

Il est bon de noter, dans cet apprentissage du codage, qu'il existe deux niveaux de lecture de dessins codés qui correspondent à des niveaux d'expertise différents :

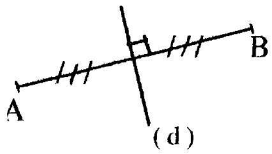
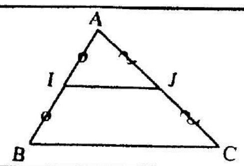
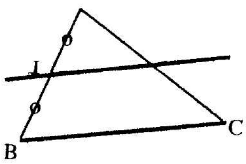
**Un premier niveau de lecture immédiate qui dépend de la culture mathématique du lecteur.**

*Exemple* : Les différentes lectures du codage de l'angle droit (voir fascicule p 15 ).

**Un deuxième niveau qui nécessite la lecture coordonnée de plusieurs codages qui vont, ensemble, évoquer la définition d'un objet mathématique ou un théorème.**

Nous parlerons, alors, de **figure déclenchante** pour exprimer que, dans ce cas, la figure codée induit une procédure de résolution du problème.

Ainsi, une lecture au deuxième niveau du codage, permet l'accès à une culture mathématique qui va être opérante dans les démonstrations.

| dessin codé | **premier niveau :** lecture isolée de chaque codage | **deuxième niveau :** association de plusieurs codages en vue de déclencher une définition ou un théorème par la lecture de ses prémisses |
|---|---|---|
|  | (d) $\perp$ (AB)<br>AC = CB<br>C $\in$ [AB] | (d) est la médiatrice de [AB]<br>ou<br>B est le symétrique de A par rapport à (d) |
|  | ABC est un triangle<br>I est le milieu de [AB]<br>J est le milieu de [AC] | dans un triangle, on a une droite qui passe par les milieux de deux côtés |
|  | ABC est un triangle<br>I est le milieu de [AB]<br>(d) est parallèle à (BC) | dans un triangle, on a une droite qui passe par le milieu d'un côté<br>et qui est parallèle à un deuxième côté |

## 3. Dans l'enseignement, lier le codage à l'apprentissage du raisonnement déductif.

### a) Les codages et le raisonnement déductif

Nous faisons l'hypothèse que le codage d'un dessin va être une aide pour l'apprentissage du raisonnement déductif.

Bien entendu, cela n'est possible que si l'enseignement du codage lui-même a déjà été largement avancé car nous avons montré comment il aide l'élève à se distancier de ce qu'il "voit" sur le dessin.

**Le codage permet la reconnaissance des conditions d'utilisation du théorème (les prémisses du théorème) contextualisées dans l'exercice.**

*Exemple* :

Dans l'exercice suivant, proposé en classe de quatrième, après apprentissage des " théorèmes des milieux " le codage permet à l'élève de repérer les conditions d'utilisation du théorème (selon la convention établie dans nos classes, les parallèles sont codées d'une même couleur ou en traits épaissis).

Enoncé :

*AEPH est un trapèze de base [AH] et [EP]. Par la symétrie de centre A, le point E a pour symétrique le point G.*

a) *Nomme plusieurs triangles de cette figure.*

b) *Cherche dans cette figure, un triangle dans lequel on peut utiliser un des théorèmes appris en classe.*

c) *Quel triangle as-tu trouvé ?*

d) *Ecris le théorème que tu peux utiliser dans ce triangle.*

e) *Quels renseignements nouveaux obtiens-tu ?*

Pré-requis :

Les élèves ont appris en classe les trois théorèmes suivants :

. Si dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

. Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté de ce triangle.

. Si dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.

Les élèves ont appris en classe à chercher les conditions nécessaires (ou prémisses) à l'utilisation de chacun des trois théorèmes (en les liant aux codages des figures associées).

Pour le théorème 1, les trois prémisses suivantes doivent être reconnues :
- un triangle,
- une droite passant par le milieu d'un côté,
- la même droite parallèle à un autre côté.

Pour le théorème 2, les trois prémisses suivantes doivent être reconnues :
- un triangle,
- une droite passant par le milieu d'un côté,
- la même droite passant par le milieu d'un autre côté.

Pour le théorème 3, les trois prémisses suivantes doivent être reconnues :
- un triangle,
- un segment d'extrémité le milieu d'un côté,
- le même segment qui a pour deuxième extrémité le milieu d'un autre côté.

Les élèves ont appris à rajouter, d'eux-mêmes, sur un dessin, un segment ou une droite si deux points qui les déterminent sont donnés et nommés dans l'énoncé.

L'appréhension opératoire d'un dessin (DUVAL 1988) a fait l'objet d'un travail avec les élèves.

Commentaires concernant l'exercice :

A propos de la question a) :

Il n'est pas évident pour les élèves de "voir" des triangles non tracés sur un dessin.
Aussi, avant tout travail sur les théorèmes, une recherche systématique de plusieurs triangles a été demandée pour les aider à acquérir une lecture plus efficace d'un dessin (dès que l'on a trois points non alignés, les élèves ont, ainsi, été habitués à penser au triangle associé).

A propos de la question b) :

Même en ayant ajouté les segments [GP] et [GH], le dessin non codé ne "déclenche" pas de théorème chez les élèves car le dessin est trop complexe.
Mais, si les données de l'énoncé sont codées sur le dessin, alors l'association des codages va aider au déclenchement du théorème.

A propos de la question d) :

Notre choix pendant l'apprentissage du raisonnement déductif est clairement de faire écrire le théorème utilisé par les élèves formulé en dehors du contexte de l'exercice (DUVAL 1986).

A propos de la question e) :

Ce type de questionnement permet à l'élève de bien séparer la conclusion du théorème de ses prémisses.

**Le codage aide à l'heuristique par la reconnaissance de dessin (figure) déclenchant.**

*Exemple* :

Enoncé : *Construis le triangle ABC tel que AB = 4 cm ; AC = 6 cm et BC = 7 cm, et sa hauteur [AH]. Place I milieu de [AC]. Calcule HI.*

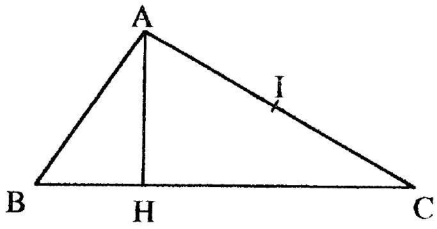
Pré-requis :

Les élèves ont appris en classe le théorème suivant :

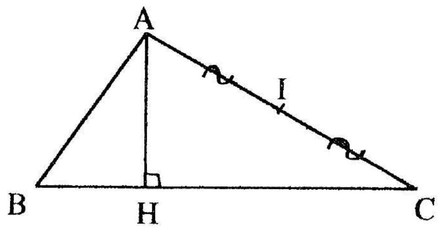
- Si un triangle est rectangle et que le milieu de l'hypoténuse est donné, alors la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Les élèves ont appris à chercher les deux conditions nécessaires à l'utilisation du théorème précédent :

- un triangle rectangle,
- le milieu de l'hypoténuse ou la médiane relative à l'hypoténuse.




Dessin non codé




Dessin codé

Commentaires :

Le dessin non codé ne permet pas de rentrer facilement dans une démarche de résolution.

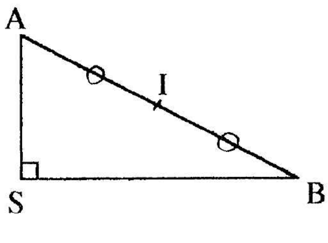
Par contre, si l'élève code la hauteur et les longueurs égales, alors on peut raisonnablement penser qu'il voit plus facilement apparaître le triangle rectangle AHC et sa médiane [HI] et que cela va ainsi déclencher un théorème adapté.

**Le codage aide à différencier un théorème de sa réciproque.**

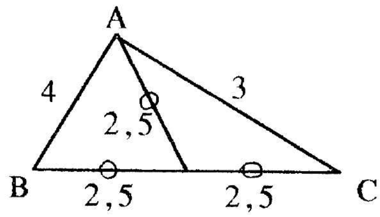
En effet, placé dans un problème, il est plus aisé de différencier les deux théorèmes grâce à la lecture des codages des prémisses.

*Exemples* :

1) *Sachant que AB = 7cm et AS = 2cm, calculer SI.*



2) *Que dire de la nature de ABC ?*




Pour que le codage soit une aide à la construction du raisonnement déductif, il faut respecter des règles d'utilisation qui doivent clairement être communiquées aux élèves en essayant d'être très strict sur leur emploi en classe.

## b) Des règles de fonctionnement :

**1. Il faut essayer de coder toutes les données de l'énoncé et ne jamais coder les conclusions.**

On peut, par exemple, faire écrire sur le cahier des élèves :

*"Avant toute démonstration, on est sûr d'une information quand :*
- *soit elle est écrite dans l'énoncé, et on peut la coder sur le dessin*
- *soit elle est codée sur le dessin.*

*Dans tous les autres cas, on ne sait pas. Ce que tu "vois" en plus sur le dessin, peut seulement être une piste pour chercher".*

**2. Il faut recycler les conclusions intermédiaires sur plusieurs pas.**

On peut :

soit faire un dessin par question en codant toutes les données (y compris les données nouvelles provenant d'une conclusion antérieure)

soit, si on désire un seul dessin, coder les conclusions des autres questions d'une autre couleur que celles utilisées auparavant.

*Remarques* :

a) Il faut avoir conscience, pour bien l'exploiter auprès des élèves, que :

- **un dessin "bien fait" codé est une aide à la conjecture,**
- **une figure à main levée codée est une aide à la démonstration.**

En effet, dans l'exemple de la page précédente :

- le dessin bien fait permet de dire que ABC semble être rectangle en A et cela aide à formuler cette conjecture ;
- par contre, la figure à main levée aide à ne pas prendre comme donnée l'angle droit.

b) Il faut maintenir une stabilité et une cohérence de l'enseignement du codage dans la classe.

c) Les figures complexes, telles que le parallélogramme, par exemple, posent un problème de codage car le choix des propriétés que l'on décide de coder peut favoriser une démarche de résolution ou, au contraire, créer un blocage.

*Exemple* :

Comment coder un parallélogramme ?

Si on privilégie le codage des parallèles, quel raisonnement déclenche-t-on ?

Si on privilégie le codage des diagonales, c'est un autre raisonnement qui est déclenché, pouvant être productif selon le problème posé.

# IV - RESUME

La géométrie fait intervenir un objet mathématique qu'on appelle communément "la figure".

Les différentes activités auxquelles donne lieu une figure (dont l'une essentielle est le raisonnement déductif) font appel à deux registres de représentation, au sens ou l'entend R. DUVAL (1993) :

- le registre graphique qui permet de faire "un dessin" représentant la figure ;
- le registre de la langue naturelle qui permet de définir la figure en explicitant les propriétés mathématiques qu'elle possède.

Les représentations d'une figure dans ces deux registres que sont le dessin et le discours, fournissent, sur la figure, deux points de vue souvent différents et complémentaires :

- un dessin, en l'absence d'un discours l'accompagnant, livre essentiellement des informations topologiques (alignement, incidence, adjacence...) et que l'on ne peut pas tenir pour certaines ;
- un discours (sous forme de texte) apportera les relations géométriques qui caractérisent une figure mais ne permettra pas de saisir d'autres relations possibles entre certains éléments, que seul, le dessin mettra en évidence et qui feront l'objet de conjectures.

Ainsi, pour le raisonnement déductif en géométrie, il y a nécessité de faire interagir les deux points de vue (dessin-discours) et de pouvoir passer de l'un à l'autre. Autrement dit, il convient de définir des "règles" qui permettent de "faire parler" un dessin, c'est à dire de lui associer un discours (ce que DUVAL appelle l'appréhension discursive).

Ces règles qui assurent les passages d'un registre à l'autre, sont, de notre point de vue, les codages.

# V - LA FIGURE À MAIN LEVEE

Le nouveau programme de Cinquième (applicable à la rentrée 1997) préconise explicitement l'utilisation de figures à main levée :

***"Les travaux de géométrie plane prennent appui sur des figures dessinées, suivant le cas, à main levée ou à l'aide des instruments de dessin et de mesure".***

Ainsi, pour la première fois, la figure dessinée à main levée apparaît officiellement comme un outil à utiliser avec les élèves pour l'apprentissage de la géométrie.

*Comment faut-il comprendre cette recommandation ?*

*Quel rôle peut-on faire jouer à une figure à main levée ?*

*Faut-il y avoir souvent recours ?*

*Quels critères peut-on se donner pour choisir dans quel cas une figure à main levée sera plus opportune qu'une figure dessinée aux instruments ?*

A l'école primaire, les propriétés que possède "une figure" doivent toujours pouvoir être confirmées (vérifiées) par la vue ou par les instruments de géométrie : l'objet sur lequel on travaille est bien le dessin (figure et dessin sont confondus).

Dans ce contexte, le dessin à main levée d'une figure n'a pas de sens puisqu'il ne présente pas, sur le plan perceptif et physique, les propriétés que la figure est sensée posséder (il ne peut y avoir contradiction, à ce niveau de l'apprentissage, entre ce que montre le dessin et ce qu'est la figure).

A partir du collège, on a recours à un dessin à main levée lorsqu'on souhaite provoquer un détachement de la perception visuelle et que l'on veut interdire le prélèvement d'informations à l'aide des instruments : cela n'a de sens que si l'on est capable, par un discours, d'expliciter les propriétés géométriques de la figure ainsi dessinée.

Ainsi, une figure dessinée à main levée, qu'elle soit donnée en complément d'un texte ou qu'elle soit faite d'après un texte, n'a d'intérêt que si l'on peut y rendre visible des informations par un moyen autre que l'appréhension perceptive : ***ce moyen est le codage.***

En présence d'une figure à main levée, puisque le dessin ne joue plus le rôle d'un codage en lui-même, on doit tenir pour vraies les informations fournies par les codages de ce dessin mais on ne doit pas tenir compte des informations que montrent les "tracés" du dessin.

Rappelons que sur un dessin tracé avec soin à l'aide des instruments, on peut prélever, en plus des informations fournies par les codages, des informations qui sont fournies par les tracés eux-mêmes telles que l'alignement de points, la position relative de certains éléments, l'incidence de deux lignes (on peut parler alors d'un codage intrinsèque au dessin).

Par contre, sur un dessin à main levée d'une figure, puisque les tracés ne peuvent pas être utilisés comme des codages, on ne peut prélever que les informations fournies par les codages " rapportés ".

Dans ce cas, comment sont incorporées au dessin des informations telles que l'alignement des points, l'incidence de deux droites, la position relative d'éléments ?

Est-ce qu'un texte apportant ces informations est toujours présent ?
Ou bien, est-ce que ces informations restent pour une grande part implicites et (ou) relèvent –elles d'une convention plus ou moins tacite ?

***L'élève est-il mis au courant, de manière stable, de l'utilisation qu'il doit faire d'un tel dessin ?***

Nous nous sommes intéressés à des exercices faisant intervenir des figures à main levée, que l'on peut trouver dans certains ouvrages de sixième.

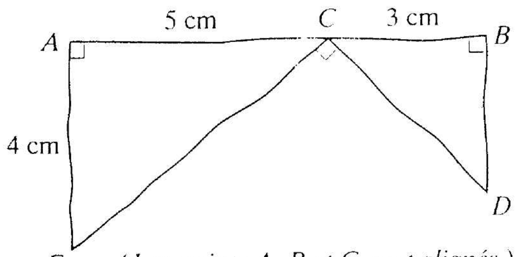
La tâche de l'élève consiste à prélever sur chaque dessin les informations codées en vue de construire un dessin précis ou d'établir une propriété géométrique.

***Tous ces travaux soulèvent une question de fond : quelles informations peut-on prélever sur de telles figures à main levée ?***

Ne doit-on prélever que les codages "rapportés" ?

N'y-a-t-il pas des implicites tels que la nature des lignes et des figures ?
(ce qui alors constituerait un codage "interne" aux figures dites "à main levée").

Exercice 1



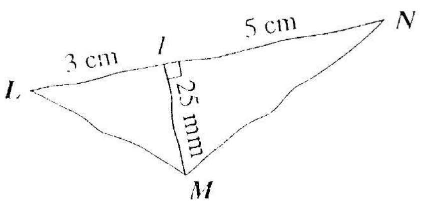

*(Les points A, B et C sont alignés.)*

Commentaire : Le texte explicite l'alignement des points A, B et C mais ne dit rien de la nature des figures AEC et CBD : il faut bien admettre, alors que rien dans l'énoncé ne le précise, que l'on a affaire à des segments de droites [AE], [EC],...

*1° Tracer la figure proposée en vraie grandeur.*
*2° Citer, en justifiant, deux droites parallèles.*
*Indiquer la nature du quadrilatère ABDE.*

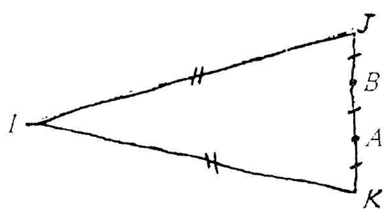
Exercice 2

*1° Faire, en vraie grandeur, la figure suivante :*




Commentaire : il faut considérer que les points L, I, N sont alignés, alors que l'énoncé ne le dit pas (le codage d'un seul angle droit ne permettant pas de déduire cela) mais aussi que LNM est un triangle.

Exercice 3




Commentaire : là encore, il est sous-entendu que les points J, B, A, K sont alignés pour répondre à la question 3. Le fait que [IK] et [IJ] soient des segments est implicite grâce au codage " // " de la figure à main levée qui exprime que les deux segments [IK] et [IJ] ont la même longueur.

1° *Qu'est ce qui permet d'affirmer que sur cette figure, qui a été dessinée à main levée, certains segments ont la même longueur ?*
2° *Recopier et compléter :*
*a) IJ =... ;* *b) AB =... =...*
3° *Vrai ou faux ?*
a) *B est le milieu du segment [JA].*
b) *I est le milieu du segment [JK].*
c) *AB est la moitié de KJ.*

L'objectif d'un travail à partir d'une “ figure ” à main levée munie de codages est de permettre à l'élève de se détacher de la perception de l'objet pour se centrer sur ses caractères géométriques signifiés par les codages.

***Il est donc indispensable de lever toute ambiguïté sur la nature du dessin considéré.***

Il est essentiel de définir clairement tout ce que signifie le dessin à main levée d'une figure : cela nécessite la mise en place d'un contrat clair avec les élèves sur l'utilisation d'une figure à main levée.

Nous proposons les règles suivantes :

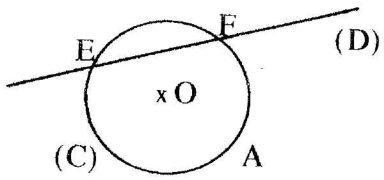
**Lorsqu'un énoncé d'exercice est fourni à l'aide d'une figure dessinée à main levée :**

**- Le texte qui accompagne la figure doit préciser les informations d'alignement de points et la nature de la figure (sauf si un alignement peut être déduit) ;**

**- sauf précision contraire, il faut considérer qu'un "tracé" qui relie deux points "nommés" représente un segment.**

**- La nature d'une ligne (droite, cercle...) doit être précisée par le texte : si tel est le cas, l'appartenance d'un point “ nommé ” à une ligne ou le fait qu'un point “ nommé ” soit l'intersection de deux lignes sont des informations qui peuvent être lues sur le dessin.**

Par exemple

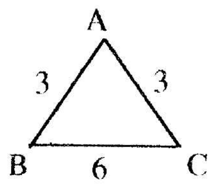



*( C ) est un cercle et (D) est une droite.*

Commentaire :
Sur le dessin ci-contre, accompagné de son texte, on peut prélever les informations suivantes :
" A est un point du cercle et la droite (D) coupe le cercle en E et F. "

**- Dans le cas ou "un non-alignement de points" n'est pas explicité par le texte, on ne peut pas prélever cette information sur la figure dessinée à main levée, en se fiant à ce que l'on voit.**

Par exemple :




*A est-il le milieu de [BC] ?*

Commentaire :
Dans l'exercice ci-contre, on ne peut pas tenir les points B, A, C pour non alignés car le texte ne le dit pas.

Les seules informations que l'on peut prélever sont : [AB], [BC], [AC] sont des segments de longueurs respectives : 3cm, 6cm, 3cm.

Sur une figure à main levée, ne seront codées que les propriétés données pour vraies (celles qui, par exemple, sont fournies par un texte ou qui sont signifiées par le codage du dessin, s'il est donné ).

**De ce point de vue-là, la figure réalisée à main levée est un outil qui facilite le passage de la perception de la figure en tant que simple dessin à la perception de la figure en tant qu'objet mathématique (" figure idéale ") : les travaux faisant appel à une figure à main levée constituent un temps fort de cette évolution.**

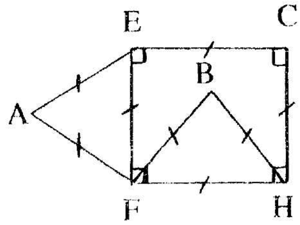
Nous avons relevé deux types de tâches s'appuyant sur un dessin codé à main levée :

<u>Construction d'une figure d'après un dessin codé à main levée.</u>

**Le dessin à main levée sera ainsi un moyen privilégié pour dissocier une propriété " donnée " et une propriété " conséquence ".**

Par exemple, on peut proposer l'exercice suivant :

*On a dessiné une figure à main levée. Dessine-la avec les instruments de géométrie.*



Commentaire :

Le dessin à main levée muni de codages est porteur des seules propriétés que l'on veut que la figure possède.

L'élève qui fait un dessin à l'aide des instruments de géométrie en tenant compte des informations fournies par les codages portés sur le dessin à main levée, peut ainsi se rendre compte que les propriétés imposées au dessin organisent les divers éléments du dessin de telle sorte qu'une propriété " non voulue " semble apparaître sur le dessin : le fait que les points A, B et C sont alignés.

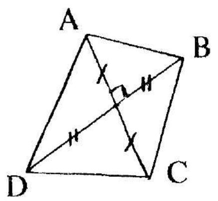
Le passage de la figure dessinée à main levée à la figure dessinée avec soin permet à l'élève de formuler une conjecture s'appuyant sur l'observation de ce dessin soigné et précis. Il peut ainsi écrire : " il semble que les points A, B et C appartiennent à une même droite. ".

On perçoit, dans ce type de tâche, l'intérêt de donner un dessin à main levée codé car il interdit le prélèvement d'une propriété qui, même si elle semble vraie, n'est pas donnée mais " provoquée " par les propriétés données.

Déduction en prenant appui sur une figure dessinée à main levée :

Par exemple :

*Sans redessiner de figure, peux-tu dire de quelle nature est le quadrilatère ABCD ?*




Commentaire :

Dans ce cas, on attend de l'élève qu'il prélève les informations fournies par les seuls codages et qu'il les associe de façon à déclencher l'application d'un théorème pour ensuite mettre en œuvre ce théorème et obtenir une conclusion.

C'est précisément dans ce type de situation qu'on a recours à une autre sorte de figure dessinée à main levée : la figure "intentionnellement" ou "grossièrement" fausse : un tel dessin n'est autre qu'une figure dessinée à main levée dans laquelle on a amplifié les imprécisions.

Il s'agit dans ce cas, plus encore que pour une figure à main levée, d'accentuer le détachement de la perception visuelle du dessin en interdisant de prélever des informations par la vue ou par les instruments : les seuls renseignements à prélever sont ceux fournis par les codages.

Il est bon de remarquer qu'une figure à main levée qui n'est pas codée est inopérante puisque le dessin ne joue plus le rôle d'un codage en lui-même : ainsi, même si un texte l'accompagne, il devient très difficile de coordonner la saisie des informations du texte et le traitement sur le dessin si rien n'est codé.

# V I- LE QUADRILLAGE

L'objectif de cette fiche est d'apprendre aux élèves à décoder les informations mathématiques portées par un quadrillage.

En effet, le test que nous avons fait passer dans plusieurs classes et que vous pouvez retrouver page 45 , montre que les élèves ne semblent pas capables de "lire" correctement les propriétés d'une figure simple utilisant uniquement les nœuds du quadrillage.
En fait, les élèves ne pensent pas, sans apprentissage, à étendre toutes les propriétés du carré au quadrillage.

Pour pouvoir travailler efficacement sur un quadrillage les élèves doivent :

- 1 . Connaître et savoir utiliser toutes les droites parallèles (sans oublier le réseau des diagonales) portées par un quadrillage.

- 2 . Connaître et savoir utiliser toutes les droites perpendiculaires (sans oublier le réseau des diagonales) portées par un quadrillage.

- 3 . Connaître et savoir utiliser toutes les longueurs égales (sans oublier le report de plusieurs fois la même longueur, sur les droites du quadrillage et sur les diagonales) portées par un quadrillage.

- 4 . Savoir qu'il est impossible de coder toutes les propriétés mathématiques portées par un quadrillage, et qu'on convient de n'en coder aucune.

- 5 . Savoir reconnaître des figures simples dessinées à partir des nœuds du quadrillage.

Nous proposons une série d'exercices susceptibles de permettre aux élèves d'acquérir ces savoir et savoir-faire.

Ces exercices peuvent se faire en classe de sixième, même si la justification mathématique de toutes les propriétés du carré ne peut pas se faire.
Mais, il peut être bon, dans toutes les classes du collège, de penser à réactiver (ou à faire découvrir) les propriétés mathématiques portées par un quadrillage, de façon à ce que l'élève sache clairement ce qu'il peut prélever comme informations sûres à l'aide du quadrillage.

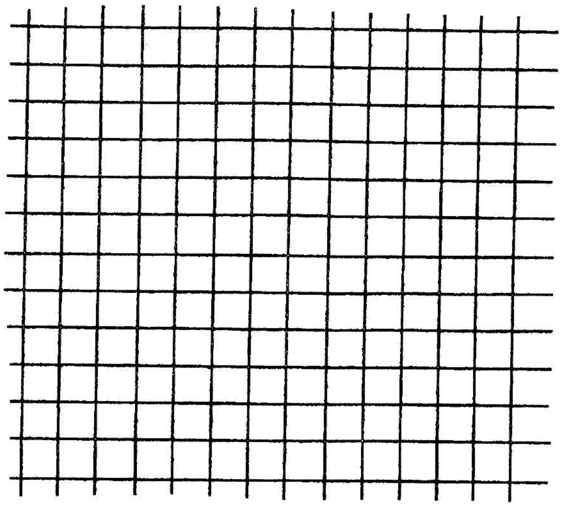
Les exercices suivants sont tous à faire avec, si besoin est, la règle non graduée, aucun autre instrument n'étant permis.
Dans ces exercices, on convient de coder le parallélisme par des droites de même couleur.

Exercice 1

*Voici un quadrillage :*

*1 . code toutes les parallèles (en utilisant des couleurs) et toutes les perpendiculaires que tu connais et qui sont sous-entendues dans ce quadrillage.*

*2 . code aussi toutes les longueurs égales que tu connais et qui sont sous-entendues dans ce quadrillage.*



Les objectifs sont :

- Mettre en évidence les parallèles du quadrillage lui-même, mais surtout, les parallèles formées par les diagonales des carrés du quadrillage.

- Mettre en évidence les perpendiculaires formées par les droites du quadrillage, mais surtout, les perpendiculaires formées par les diagonales des carrés du quadrillage.

- Mettre en évidence les longueurs égales des côtés des carrés du quadrillage, mais surtout, les longueurs égales des diagonales des carrés du quadrillage.

- Prendre conscience qu'il est impossible de coder toutes les informations mathématiques (longueurs égales, droites parallèles ou perpendiculaires) que possède un quadrillage sans se retrouver devant un dessin illisible et surchargé.

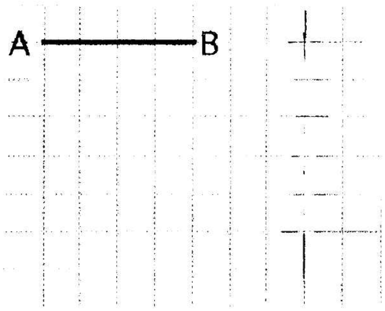
Voici un exemple de conclusion qu'il nous paraît important de faire écrire dans les cahiers des élèves :

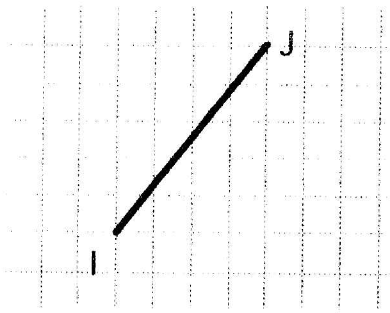
" Il est impossible de coder toutes les propriétés mathématiques que possèdent un quadrillage, aussi un quadrillage est-il toujours donné non codé.
Mais il ne faut pas oublier toutes les propriétés sous-entendues qu'il possède et que l'on pourra coder en cas de besoin. "

Exercice 2 :

*a) Le segment [AB] a été tracé en gras. En utilisant les propriétés du quadrillage :*
*- construis deux segments de même longueur que [AB] et parallèles à [AB] ;*
*- construis deux segments de même longueur que [AB] et non parallèles à [AB].*

*b) Le segment [IJ] a été tracé en gras. En utilisant les propriétés du quadrillage :*
*- construis deux segments de même longueur que [IJ] et parallèles à [IJ] ;*
*- construis deux segments de même longueur que [IJ] et non parallèles à [IJ].*




Les objectifs sont :

- Etre capable de construire, en s'aidant du quadrillage, des segments (dont les supports ne sont pas forcément parallèles) de même longueur dans les deux cas suivants :

a) le segment donné a pour support une droite du quadrillage et sa longueur est un multiple du côté d'un carré du quadrillage.
b) le segment donné a pour support une diagonale du quadrillage et pour reproduire sa longueur, il faut compter les carreaux du déplacement " horizontal " puis ceux du déplacement " vertical " pour aller d'une extrémité à l'autre de ce segment.

- Prendre conscience que, sur un quadrillage, des segments peuvent avoir la même longueur même s'ils ne sont pas parallèles.

- Prendre conscience que, sur un quadrillage, l'on peut savoir si des segments ont la même longueur même si l'on ne connaît pas leur mesure(il suffit de " compter " les déplacements " horizontal et vertical " pour aller d'une extrémité à l'autre du segment).

*Remarque :*

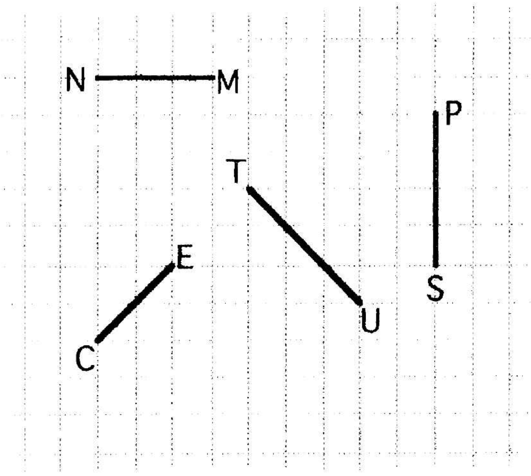
Nous utilisons les mots " horizontal " et " vertical " et nous expliquons à nos élèves que ces mots correspondent à la réalité du tableau mais pas à celle des cahiers.

Exercice 3 :

*On a tracé quatre droites (NM) , (CE) , (TU) et (PS). En t'aidant des propriétés du quadrillage qui sont sous-entendues :*

*a) Trace en vert, pour chacune d'elles, une droite qui lui est parallèle.*

*b) Trace en bleu, pour chacune d'elles, une droite qui lui est perpendiculaire.*



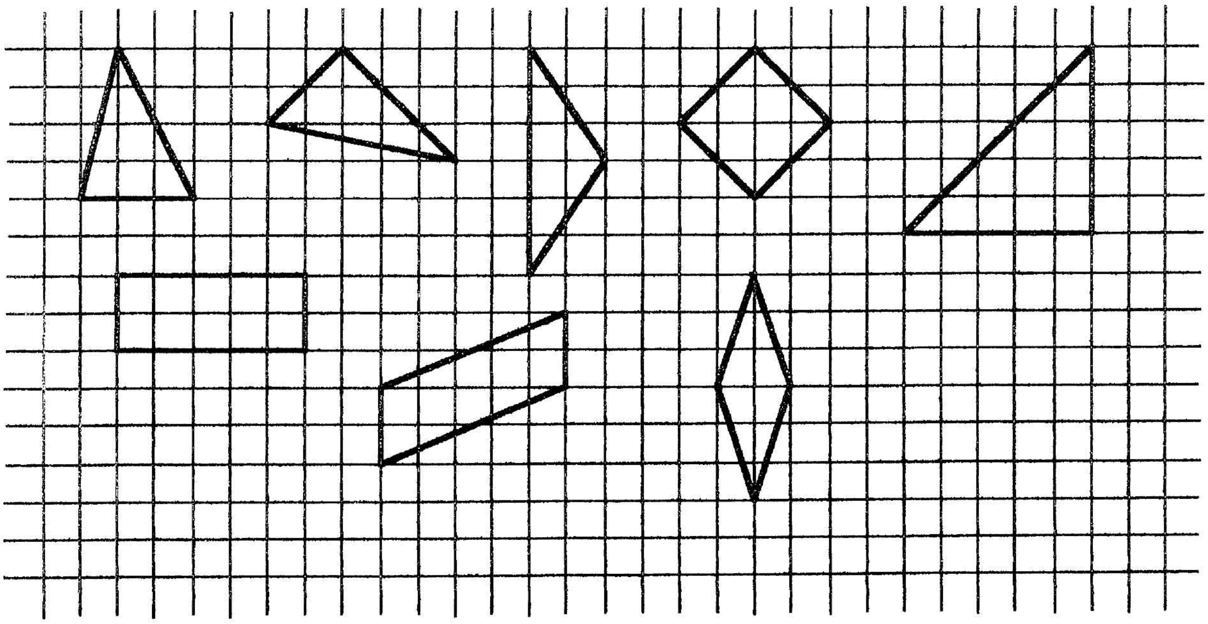

Les objectifs sont :

Savoir construire des droites parallèles à une droite donnée, en s'aidant des propriétés du quadrillage, en faisant varier l'inclinaison de la droite donnée.

Savoir construire des perpendiculaires à une droite donnée, en s'aidant des propriétés du quadrillage, en faisant varier l'inclinaison de la droite donnée.

Exercice 4 :

*On a tracé des triangles et des quadrilatères.*
*En t'aidant des propriétés du quadrillage qui sont sous-entendues, précise, pour chaque figure, les propriétés particulières qu'elle possède et, si possible, donne-lui un nom.*



Les objectifs sont :

Savoir retrouver les propriétés de longueurs égales, de droites parallèles et de droites perpendiculaires portées par le quadrillage, pour reconnaître des triangles et des quadrilatères particuliers.

# VII - QUELQUES EXERCICES PERMETTANT DE TRAVAILLER LE CODAGE COMME OBJET D'APPRENTISSAGE

Tout au long de l'année, en parallèle avec les apprentissages mathématiques, les codages vont être travaillés pour eux-mêmes à travers des exercices spécifiques dont le seul but est de savoir placer des codages sur un dessin ou de savoir les lire.

Il faut, bien sûr, avoir, au préalable, lié l'apprentissage d'une propriété mathématique (droites parallèles, droites perpendiculaires, longueurs égales, médiatrice d'un segment...) avec son (ou ses) codage (s) sur un dessin.

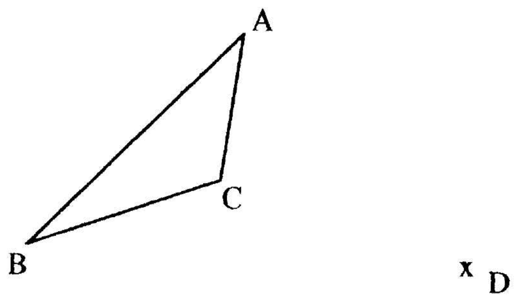
Nous proposons quelques exercices qui permettent aux élèves de :

- Savoir placer sur un dessin les codages qui correspondent aux propriétés mathématiques données dans l'énoncé.
- Savoir reconnaître par la lecture des codages d'un dessin donné, des propriétés mathématiques.

## 1 - Passage de l'énoncé au dessin

Exercice 1 :

*On te donne le dessin ci-dessous. Trace la parallèle à (AB) passant par C. Trace la perpendiculaire à (BC) passant par D.*
*Attention, n'oublie pas les codages.*

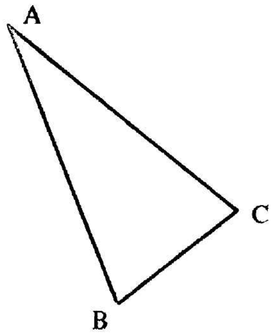
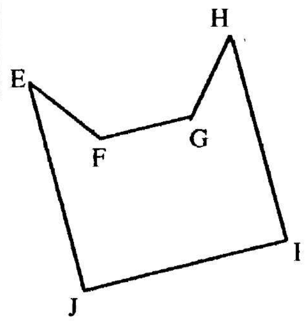
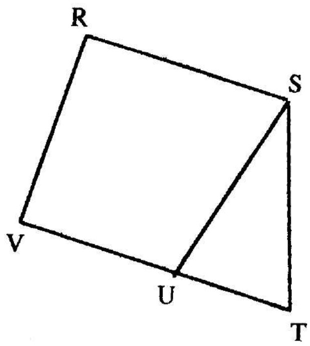
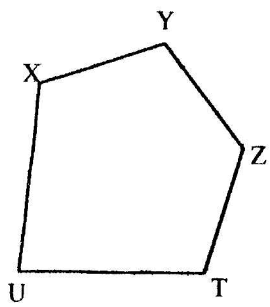
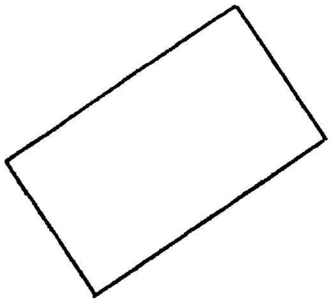
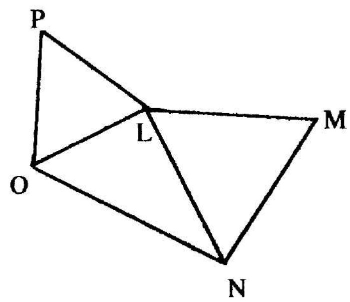



Commentaire :

Dans cet exercice les informations données sont écrites dans le langage naturel.
La tâche de l'élève est de transcrire sur un dessin, à l'aide des codages, les propriétés mathématiques décrites par l'énoncé.

Exercice 2 :

*Sur chaque dessin marque, à l'aide du codage, les informations données.*

| | | |
|---|---|---|
| <br>AB = AC | <br>EF = FG = GH<br>EF = HI<br>(EJ) $\perp$ (JI) | <br>RS = SU = ST<br>(RV) $\perp$ (VU)<br>(SR) $\perp$ (RV) |
| <br>XU = UT<br>XY = YZ = ZT | <br>C'est un rectangle | <br>PL = LO = OP<br>LM = MN = NL<br>(OL) $\perp$ (LN) |

Commentaire :

Dans cet exercice, les informations sont données dans le langage symbolique propre aux mathématiques.

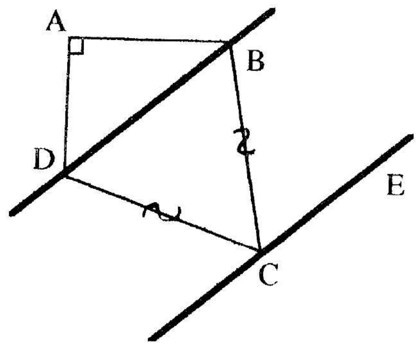
La tâche de l'élève est de transformer ces symboles en propriétés mathématiques puis de les reporter sur le dessin par l'intermédiaire des codages.

**2 - Passage du dessin à l'énoncé**

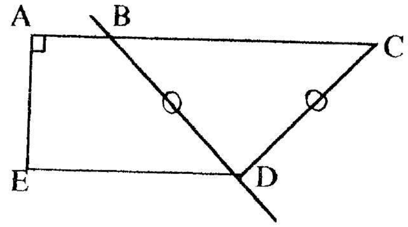
Exercice 3 :

*Voici deux dessins codés. Pour chacun d'eux, écris toutes les informations dont tu es sûr(e) et précise pourquoi tu le sais.*

a)




b)




Dessin exact, sans piège visuel :
Il y a concordance entre ce que l'on " voit " et ce qui est donné par les codages.

Dessin exact avec piège visuel :
La droite (AB) est " vue " parallèle à la droite (ED) alors qu'aucun codage ne permet de le dire.

Commentaire :

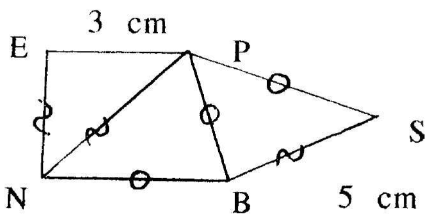
Dans cet exercice, un dessin codé est donné et il faut reconnaître les propriétés mathématiques qui lui sont associées.

Il y a deux cas possibles dans cet exercice :

- dans le dessin construit aux instruments, il y a concordance entre la perception visuelle de ce dessin et les informations données par les codages.
- dans le dessin construit aux instruments, il n'y a pas concordance entre la perception visuelle et les propriétés données par les codages. Ceci va permettre d'opposer les informations sûres aux informations possibles.

Exercice 4 :

*Voici une figure à main levée ; donne toutes les informations que tu connais par lecture des codages, puis construis le dessin avec les instruments.*




Commentaire :

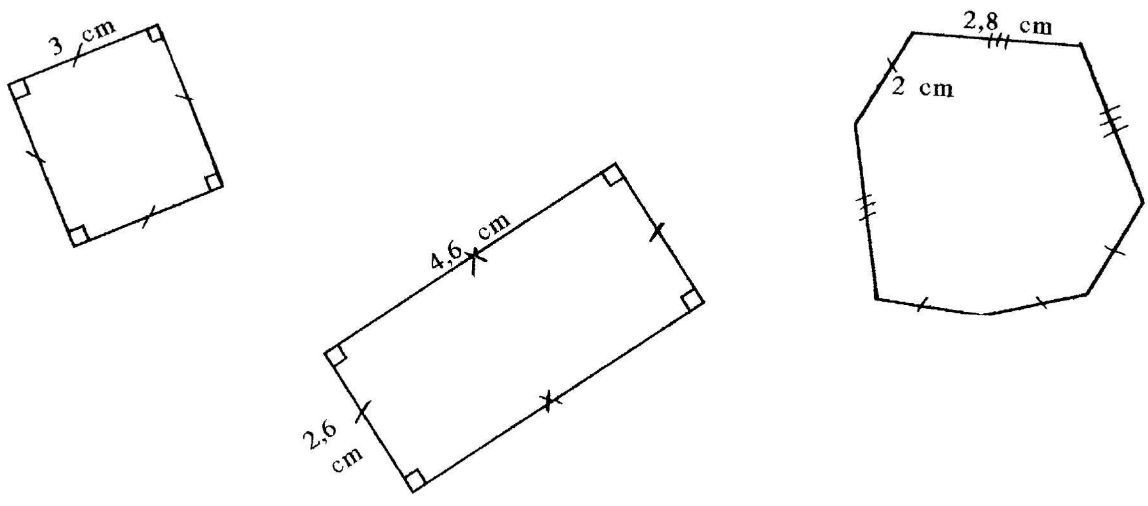
Il s'agit, ici, de lire des codages portés par un dessin fait à main levée et de les transcrire en propriétés mathématiques dans le but de faire une construction.

Les problèmes inhérents aux dessins à main levée sont détaillés dans le chapitre IV.

Exercice 5 :

*Observe les trois dessins ci-dessous : les petits signes indiquent que certains segments ont la même longueur.*

*Sans rien mesurer, calcule le périmètre de chacune des trois figures.*




Commentaire :

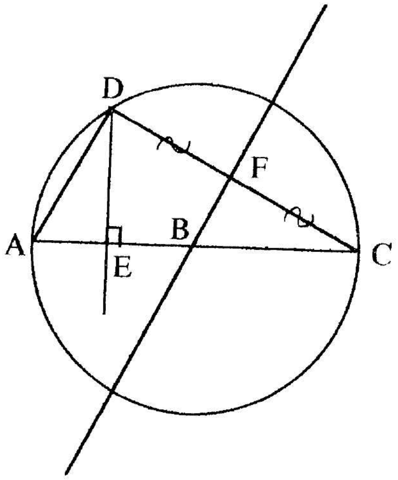
Ici, la lecture des codages d'un dessin fournit des informations permettant d'effectuer des calculs.

## VIII- QUELQUES EXERCICES UTILISANT LE CODAGE COMME OUTIL POUR L'APPRENTISSAGE DU RAISONNEMENT DEDUCTIF

### 1 . Dissociation dessin - figure

Exercice 1 :

*Faire une liste de toutes les propriétés de la figure ci-dessous. Faire deux colonnes : dans l'une mettre les propriétés qui sont certaines , dans l'autre celles qui semblent vraies.*




*B est le centre du cercle ( C ).*

Commentaire :

Ce type d'exercice permet d'aider les élèves à prendre conscience de la différence **entre ce qui est vu et ce qui est donné**. Le seul moyen efficace et convaincant pour faire cette différence est le codage qui est, nous semble-t-il, l'outil permettant d'être sûr qu'une information est donnée.

Le fait de faire écrire les informations dans deux colonnes permet de différencier ce qui est donné (tenu pour certain) de ce qui est possible (mais incertain). Cela permet de mettre en évidence qu'un dessin fait avec précision doit être regardé avec prudence car il est porteur de propriétés dont on n'est pas certain, mais que ce dessin est utile car il peut déclencher une démarche conduisant à la solution.

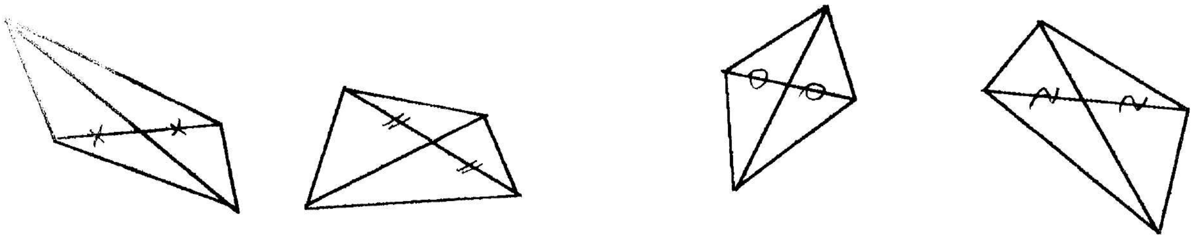
Exercice 2 :

*Construis plusieurs quadrilatères différents dans lequel l'une des diagonales passe par le milieu de l'autre.*

Commentaire :

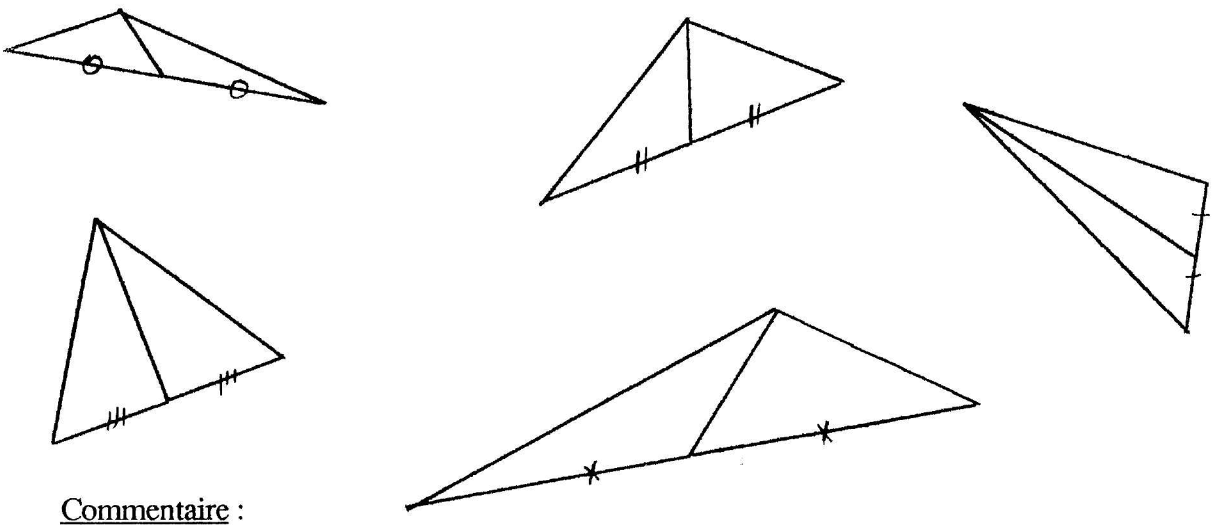
Les productions des élèves font apparaître une grande diversité de dessins : tous ces dessins ont en commun de satisfaire les caractéristiques de l'énoncé (ce que les codages attestent).
L'objectif est, à travers la confrontation des productions, de permettre aux élèves de prendre conscience que l'on est en présence de différents dessins d'une même figure. C'est la rupture entre la perception visuelle d'un dessin et l'appréhension mathématique d'une figure. Cette prise de conscience n'est possible que par la présence des codages sur les différents dessins.

Exemples de productions d'élèves :



Exemple 3 :

*Voici cinq dessins : ils ont été obtenus à partir du même énoncé.*
*Peux-tu réécrire cet énoncé ?*



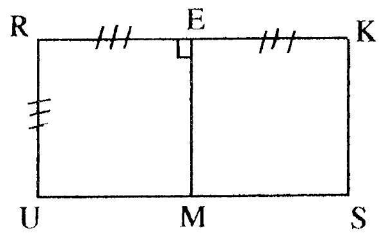
Commentaire :

L'objectif est de dégager les caractéristiques communes des cinq dessins qui sont signifiées par les codages et de transcrire en langage naturel les propriétés mathématiques correspondant aux invariants repérés.

## 2 . Changement de point de vue autour des codages

Exercice 1 :

*Voici une figure codée, donne toutes les manières possibles de lire les informations que tu peux en extraire.*




Commentaire :

Dans cet exercice, un objectif est d'amener les élèves à donner toutes les interprétations possibles d'un codage, qui vont dépendre du niveau de connaissance mathématique de la classe.

Un autre objectif est de savoir délaisser la perception visuelle (dessin) au profit d'une lecture ne prenant en compte que les données (figure).

Par exemple, une réponse possible est :
(ME) est perpendiculaire à (RK) et E est le milieu de [RK]
ou encore : (ME) est la médiatrice de [RK].

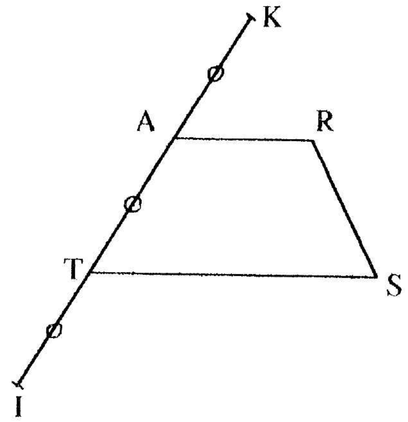
Exercice 2 :

*a) Fais la figure correspondant à l'énoncé suivant et code les informations données par l'énoncé :*

*ARST est un quadrilatère tel que (AR) parallèle à (ST).*

*On appelle K le symétrique du point T par rapport au point A et I le symétrique du point A par rapport à T.*

*b) Ecris le maximum de renseignements concernant les points I, A, K et T et les segments ayant pour extrémités ces points.*




Commentaire :

Un premier objectif est de construire la figure à partir de l'énoncé et, ensuite, de coder les informations données par l'énoncé.

Un deuxième objectif est d'amener les élèves à donner toutes les interprétations possibles d'un codage ; elles sont, bien sûr, liées aux connaissances mathématiques des élèves.

Par exemple, on peut répondre :

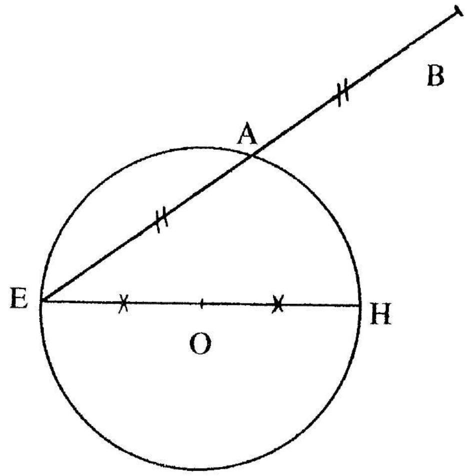
IT = TA = AK
T est le milieu de [AI]
A est le milieu de [KT]
et encore IT = 1 / 3 IK
IA = 2 / 3 IK

## 3 . Les figures déclenchantes

Pour ces deux exercices, si les élèves ne sont pas habitués à coder les dessins qu'ils construisent, alors ils vont se retrouver face à un dessin dont la lecture mathématique ne va pas être aidée par les codages ; ce qui ne facilitera pas l'identification des prémisses d'un théorème.

<u>Exercice 1</u> :

*O est le centre du cercle ( C ).*
*B est le symétrique de E par rapport à A.*
*Comment sont les droites (AO) et (BH) ?*

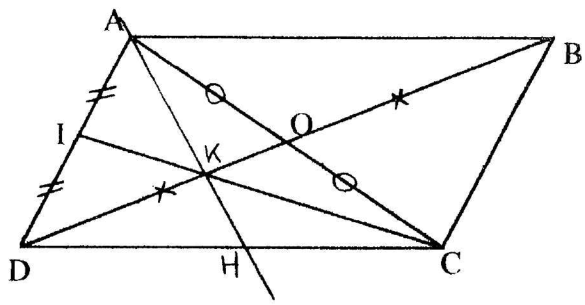



<u>Commentaire</u> :

Le codage des propriétés : " A milieu de [EB] et O milieu de [EH] " fait ressortir la figure - type : " triangle avec les milieux de deux côtés " qui déclenche le théorème par la reconnaissance de ses prémisses.

<u>Exercice 2</u> :

*ABCD est un parallélogramme de centre O.*
*I est le milieu de [AD].*
*(CI) et (OD) se coupent en K.*
*(AK) coupe (DC) en H.*
*Montre que H est le milieu de [DC].*




<u>Commentaire</u> :

Le codage de la propriété du parallélogramme : " les diagonales se coupent en leur milieu " et de la propriété : " I milieu de [AD] " fait apparaître la figure - type : " triangle avec deux médianes ".

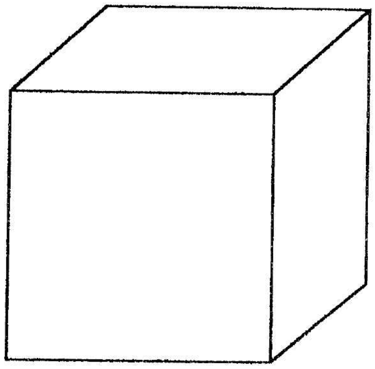
Cela permet d'identifier le point K comme le point d'intersection de deux médianes, c'est à dire comme le centre de gravité du triangle ADC et de déclencher le théorème de concourrance des médianes d'un triangle.

# VIII – TEST : COMMENT DES ELEVES INTERPRETENT DES CODAGES

**a) Voici un test qui a été proposé à des élèves de collège :**

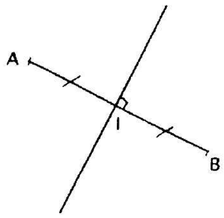
## TEST

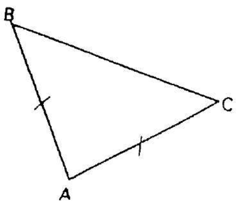
**I** -

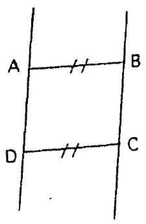


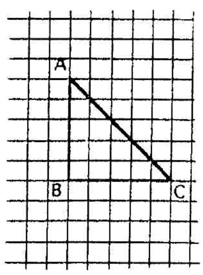
Voici une représentation d'un cube non transparent.
Marque les angles droits.

**II** - Que peux-tu affirmer en voyant chacun des dessins suivants ?



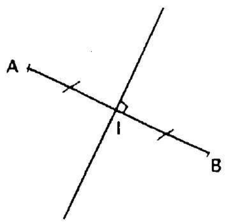



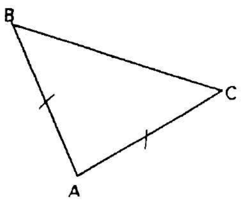
b) <u>**Objectifs pour chaque exercice**</u> :

I – Capacité à retrouver les propriétés réelles de l'objet dans l'espace et à les coder sur le dessin
(la perspective cavalière déforme certains angles et certains côtés).

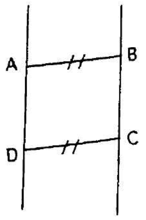
II -



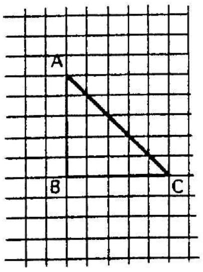

Capacité à coordonner deux codages.




Capacité à gérer l'opposition entre le codage et la lecture sur le dessin.




Capacité à gérer l'opposition entre le codage et la lecture sur le dessin.
(Il peut y avoir concurrence, pour certains élèves, entre le codage des segments égaux et le symbole des droites parallèles.)




Capacité à identifier les propriétés implicites portées par le quadrillage.

c) **Commentaire** :

Ce test qui concerne l'interprétation des codages a été proposé à un certain nombre d'élèves de classe de sixième et de troisième.

Les résultats ont été regroupés en trois catégories :
- des élèves de sixième,
- les élèves d'une troisième dite "bonne" (3° B),
- les élèves d'une troisième dite "faible" (3° F).

Nous donnons, plus loin, des pourcentages sur quelques erreurs à partir des réponses des élèves. Il se dégage de cette étude que :

- pour les élèves de 3° F la lecture du codage semble rester au niveau de la lecture simple du dessin alors que les élèves de la 3° B semblent se détacher de ce qu'ils voient pour arriver à la figure "idéale" ;
- les élèves de la 3° F semblent performants sur la vision de l'espace (objet concret en référence) ;
- en sixième, la prise d'information directe à l'aide du dessin (éventuellement à l'aide des instruments) semble encore dominante.

Il est intéressant de constater combien le quadrillage en tant que support est mal "lu" par les élèves, alors qu'il est si souvent utilisé. Ce qui n'est pas étonnant si on considère qu'il faut retrouver toutes les propriétés du carré pour être performant dans la lecture d'un quadrillage et que ce travail est toujours laissé à la seule charge de l'élève.

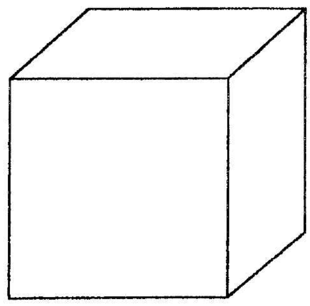
En conclusion, au vu de ce test :

***il semble que le niveau de lecture du codage soit lié au niveau de culture mathématique de l'élève.***

d) <u>Les réponses des élèves</u> :

Voici les réponses des élèves autour de l'interprétation des codages :

I - Nous avons choisi uniquement les réponses qui nous ont paru significatives :



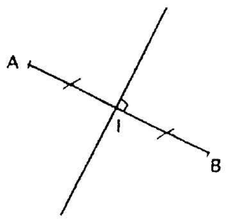
- Tous les angles droits codés

| | |
|---|---|
| 6ème : | 37% |
| 3ème B : | 62% |
| 3ème F : | 63% |

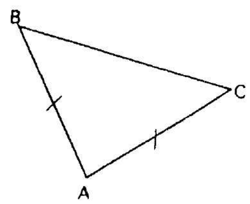
- Angles droits codés sur la face avant

| | |
|---|---|
| 6ème : | 42% |
| 3ème B : | 38% |
| 3ème F : | 26% |

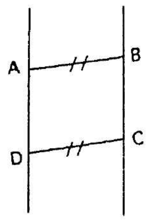
II -



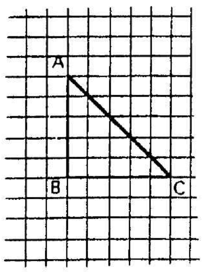

| Réponse | 6ème | 3ème B | 3ème F |
|---|---|---|---|
| Médiatrice de [AB] | 0% | 48% | 0% |
| Angle droit | 75% | 80% | 80% |
| Longueurs égales | 46% | 90% | 80% |




| Réponse | 6ème | 3ème B | 3ème F |
|---|---|---|---|
| AB = AC | 50% | 100% | 89% |
| Angle droit | 38% | 0% | 1% |




| Réponse | 6ème | 3ème B | 3ème F |
|---|---|---|---|
| (AB) // BC | 42% | 24% | 47% |




| Réponse | 6ème | 3ème B | 3ème F |
|---|---|---|---|
| AB = BC | 33% | 69% | 42% |
| Angle droit | 67% | 83% | 68% |

# BIBLIOGRAPHIE

**ARSAC G.**, 1987, "L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique", RDM n° 8.

**ARSAC G.**, 1990, "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France", RDM n° 9 (3).

**ARSAC G.**, "Initiation au raisonnement déductif au collège", IREM de LYON.

**BALACHEFF N.**, 1982, "Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence", RDM n° 3.

**DUVAL R.**, 1988, "Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence", Annales de didactique et de sciences cognitives 1.

**DUVAL R.**, 1993, "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée", Annales de didactique et de sciences cognitives.

**DUVAL R.**, 1995, "Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels".

**DUVAL R. et EGRET M.A.**, 1989, "L'organisation déductive du discours", Annales de didactique et de sciences cognitives 2.

**GAUD D. et GUICHARD J.P.**, 1984, "Apprentissage de la démonstration", Petit x n° 4.

**LABORDE C**, 1982, "Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques", Thèse.

**MESQUITA A.L.**, 1989, "L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie", Thèse.

**NOIRFALISE R.**, 1993, "Contribution à l'étude didactique de la démonstration", RDM n° 13 (3).

**PADILLA V.**, 1992, "L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques", Thèse.

**Auteur :** Groupe Didactique

**Titre :** Le codage : quand, comment, pourquoi ?

**Editeur :** IREM de Montpellier

**Date :** Juin 1998

**Nombre de page :** 49 pages

**ISBN** : 2-909916-30-8

**Type de document :** Fascicule IREM

**Support :** Papier

**Type d'utilisateur :** Professeur stagiaire, enseignant, formateur, chercheur.

**Résumé :**

A partir d'un travail autour de l'apprentissage du raisonnement déductif est apparu l'importance de ces petits signes que l'on peut placer sur un dessin et de tous les problèmes que leur absence ou leur présence sur un dessin pouvait soulever.

L'objectif de cette brochure est de présenter nos réflexions sur le codage d'un dessin ainsi que l'impact des codages sur l'apprentissage du raisonnement déductif et sur la compétence des élèves à lire mathématiquement un dessin.

**Mots clés :** codage, dessin, figure, figure déclenchante, géométrie, raisonnement déductif.