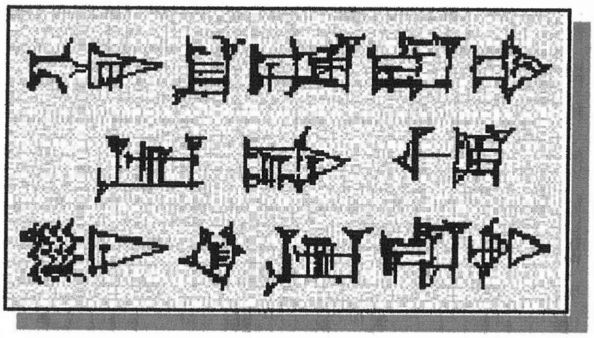
Université de Montpellier II

Publication de
l'Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques



Fonctions de l'écrit dans la classe de mathématiques

Alain BRONNER – Sylvie PELLEQUER
Groupe Didactique.

2000

IREM
UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2

cc 040 - Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER Cedex 05
Tél : 04.67.14.33.83 - 04.67.14.33.84
Fax : 04.67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr
http://www.irem.univ-montp2.fr

Fonctions de l'écrit dans la classe de mathématiques

Étude dans le cas de l'enseignement de la racine carrée et de la reprise de la géométrie en classe de troisième

Alain BRONNER - Sylvie PELLEQUER
Groupe Didactique

2000

PREFACE

L'écrit occupe une place centrale dans la constitution des mathématiques, à travers les premiers nombres et les premières figures tracés sur le sable. Il occupe aussi une place importante dans l'enseignement des mathématiques et cette place croît tout au long de la scolarité des élèves[1] :

- c'est l'écrit qui donne accès à une pluralité de *registres*, dont la *coordination* permet de distinguer un objet mathématique de ses représentations[2] ;
- c'est l'écrit qui facilite le développement de *l'aspect sémantique du langage* et donc le développement de la pensée[3] ;
- c'est l'écrit qui permet le passage du *débat scientifique*[4] à la *démonstration*[5]

Il était donc assez naturel que l'INRP (Institut National de la Recherche Pédagogique) lance un appel à coopération en 1994, autour de *l'écrit en mathématiques au collège*. La recherche à effectuer était ainsi décrite :

> *Le travail envisagé aura pour objectif de repérer, d'analyser, dans le cadre de la didactique des mathématiques, les difficultés rencontrées par les élèves de collège dans des situations de réception et de production de différents écrits en cours d'apprentissage et après apprentissage.*
> *Un des axes principaux d'analyse sera l'étude des fonctionnalités, pour l'élève, des différents écrits : degré de nécessité, place dans les processus de conceptualisation, d'apprentissage, de recherche, de contrôle...*[6]

L'IREM de Montpellier, avec d'autres IREM, avait répondu à cet appel dans le cadre de l'ADIREM (Association des Directeurs d'IREM) en proposant de centrer son étude sur :

> *la lecture, la production et l'articulation des écrits dans les différents registres sémiotiques (langue naturelle, graphique, algébrique) mis en jeu dans les processus d'apprentissage et de conceptualisation*[7].

---

[1] INRP, 1987, *Les enseignements en CM2 et 6ème, continuité et rupture.*

[2] DUVAL Raymond, 1996, *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 16-3, pp. 349-382.

[3] VIGOTSKI Lev, 1985, *Pensée et langage*, Paris : Editions sociales.

[4] LEGRAND Marc, 1993, *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse*, Repères-IREM n°10, pp. 123-159.

[5] HOUDEBINE Jean, 1998, *Démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette éducation.

[6] INRP, 1994, *Appel à coopération 1994-1995.*

[7] IREM de Montpellier, 1994, *Proposition en réponse à l'appel à coopération de l'INRP.*

Cette recherche s'est développée dans deux directions :

- l'analyse de la place et du rôle de l'utilisation de diverses représentations sémiotiques dans *les narrations de recherche*. Des articles sont déjà parus sur ce point[8], une étude plus complète sera publiée en juin 2001 par l'IREM de Montpellier ;
- les fonctions de l'écrit dans la classe de mathématiques.

C'est cette dernière direction qu'explorent Alain Bronner et Sylvie Pellequer dans cette publication. En étudiant les cadres géométriques et algébriques, ils mettent en évidence la variété des types d'écrits et la pluralité de leurs fonctions.

Ce travail sera sans doute très utile pour le maître, soucieux de comprendre les difficultés des élèves dans sa classe, comme pour le formateur, en formation initiale ou continue, voulant introduire les notions de "conflits socio-cognitifs", de "mémoire de la classe" ou de "contrat didactique".

Il s'agit finalement de *permettre à l'élève de devenir un "sujet écrivant" et pas seulement un "sujet copiste", de passer d'un rapport oral à l'écrit à un rapport écrit à l'écrit sans faire de l'écriture un objet d'enseignement séparé de l'activité mathématique elle-même*[9].. C'est dire l'importance de ce champ d'étude pour la didactique des mathématiques.

Luc TROUCHE, directeur de l'IREM

Cette publication a été réalisée grâce :

- Aux moyens horaires donnés par l'INRP dans le cadre d'un contrat INRP-ADIREM ;
- Aux moyens de secrétariat et de reprographie de l'IREM.

[8] SAUTER Mireille, *Formation de l'esprit scientifique par les narrations de recherche au collège*, Repères-IREM n°39, pp. 7-20.

[9] ASSUDE Térésa et al., 1999-2000, *L'écriture au quotidien dans une classe de mathématiques*, Petit x, n°54, IREM de Grenoble, pp. 5-28.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Ce travail a été produit dans le cadre d'une recherche initiée par l'INRP sur l'écrit en mathématique. Notre étude porte plus spécifiquement sur la place et le rôle de différents types d'écrits dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en classe de troisième.

Les apprentissages mathématiques se réalisent à partir de productions très variées d'écrits, que ce soit des écrits didactiques du professeur (écrits de synthèse de cours, fiches d'exercices, formulation de consignes, ...) ou des écrits d'élèves (en situation de recherche, de résolution, de formulation de réponses, de messages à l'intention d'élèves ou du professeur, ...). Ces écrits font appel à des contrats didactiques différents [BROUSSEAU, 1986], ne se fondent pas sur les mêmes règles, ne mobilisent pas les mêmes compétences pour les prendre en compte ou pour les produire. De plus ils font intervenir des objets mathématiques qui se présentent dans des registres divers [R. DUVAL, 1993] qui ont des caractéristiques différentes. La variété des types d'écrits soulève de nombreuses questions :

- Quels sont les rôles spécifiques de chacun de ces écrits ?
- Quelles sont les caractéristiques de ces écrits ?
- Quelles sont les règles propres à chacun de ces écrits ?
- Quelles sont les compétences requises (langagières, mathématique, ...) pour travailler à partir de ces écrits ?
- Quelles sont les compétences à atteindre en s'appuyant sur ces écrits ?
- Quelles sont les difficultés propres à ces écrits ?

Nous nous proposons de donner des éléments de réponses à ces questions à travers des ingénieries que nous avons développées sur deux thèmes mathématiques en classe de Troisième : la racine carrée et la géométrie, en lien à l'apprentissage de la démonstration. Nous envisagerons successivement les différents rôles suivants :

- l'écrit comme moyen de caractériser le rapport personnel des élèves ;
- l'écrit comme moyen de conflit socio-cognitif ;
- l'écrit comme mémoire de la classe ;
- l'écrit comme moyen d'expliciter des procédures ;
- l'écrit comme moyen de réactiver des connaissances ;
- l'écrit comme moyen de négocier un contrat didactique.

*A. **BRONNER**, maître de conférences,*
IUFM de Montpellier
*S. **PELLEQUER**., professeur de mathématiques,*
Collège Pic Saint-Loup, Saint-Clément de Rivière
Membres de l'équipe Didactique de l'IREM.

I - L'écrit dans le Numérique : Étude dans le cas de l'enseignement de la racine carrée

1. L'écrit comme moyen d'accéder au rapport personnel de l'élève à l'objet racine carrée

Une des premières utilisations de l'écrit dans le travail de l'enseignant est l'étude des *rapports personnels* [COPPE, 1995] des élèves à un objet de savoir. Si la prise en compte de ces rapports doit être un souci constant de l'enseignant, elle est particulièrement utile en début d'une séquence d'enseignement visant l'appropriation d'un savoir. Nous avons ainsi mené une étude diagnostique concernant l'objet " racine carrée " avant tout enseignement sur cet objet. Cette étude est basée sur un test qui nous a permis d'accéder aux rapports personnels des élèves, à partir de leurs écrits.

1.1. Le cadre d'analyse

1.1.1. Typologie des rapports personnels d'élèves aux objets racine carrée et nombre réel

Nous nous appuyons sur la typologie de *rapports personnels* d'élèves élaborée par [BRONNER, 1997]. Nous rappelons ici les modèles principaux de cette typologie construite dans le cadre de la théorie anthropologique de [CHEVALLARD, 1988/89].

- **Le modèle "Carré Parfait" (CP)**

Dans le modèle CP, seuls sont acceptés comme nombres les entiers et les décimaux et éventuellement les rationnels (ou du moins les quotients d'entiers écrits sous forme fractionnaire). Dans un fonctionnement d'élève conforme à ce modèle se dégage un espace numérique basé sur le système de nombres SN = $\mathbb{D}$ ou SN = $\mathbb{Q}$, et $\sqrt{a}$ doit être un nombre positif de SN. La racine carrée apparaît comme une application $\sqrt{\ }$: C ----> SN de l'ensemble des carrés parfaits à valeurs dans le système de nombres ; autrement dit C = $\mathbb{D}^2$ ou C = $\mathbb{Q}^2$.

- **Les théorèmes**

Dans ce modèle, on a le *théorème-en acte* [VERGNAUD, 1991] : "*Pour a ∈ SN, $\sqrt{a}$ existe si et seulement si a est carré parfait*".

Nous verrons que cette propriété n'est pas toujours explicitée chez les élèves relevant de ce modèle, mais certains élèves agissent en situation comme s'ils l'utilisaient. De même, la conservation de la nature du nombre et de l'écriture par les opérations et par l'opérateur racine carrée sont des théorèmes dans ce modèle.

On a aussi les règles :

" si a est un nombre positif de SN, $\sqrt{a^2} = a$ ",

et plus spécifiquement pour les fractions :

pour p et q entiers positifs $\sqrt{(\frac{p}{q})^2} = \frac{p}{q}$,

et aussi, pour a et b dans le système de nombres SN et carrés parfaits :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}\,;\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

- **Modèles Formelle (CF) et "Carré parfait et Négatifs" (CP-N)**

Le modèle Formel (CF)

Dans ce rapport au savoir, le système de nombres SN est toujours $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$, et seuls les entiers, les décimaux et les rationnels ont le statut de nombre. Les racines carrées $\sqrt{a}$ - notamment pour a non carré parfait - sont considérées comme des expressions formelles ou des artifices de calcul utilisés dans des transformations algébriques. Les règles de calcul sont considérées comme des règles de transformation des écritures formelles :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}\ ;\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ ;\ \sqrt{a^2} = a.$$

Plus généralement, ce type de rapport conduit à travailler dans l'algèbre des radicaux avec des règles de transformation des écritures. Il en est de même avec les fractions. Ce type de rapport personnel peut conduire à des règles non conformes aux règles mathématiques.

Le modèle (CP-N)

Ce type de rapport personnel aux objets nombre réel et racine carrée est à relier à la fois aux modèles formel CF et carré parfait CP. Il fonctionne de façon analogue au modèle CP sur les nombres positifs, avec la différence qu'on accepte les $\sqrt{-a}$ lorsque a est carré parfait. Des règles sont utilisées pour le cas des nombres négatifs :

- pour a élément de C, $\sqrt{-a} = \sqrt{a}$ ou, pour b nombre positif de SN $\sqrt{-b^2} = b$;
- pour a élément de C, $\sqrt{-a} = -\sqrt{a}$ ou, pour b nombre positif de SN $\sqrt{-b^2} = -b$;

(où $C = \mathbb{D}^2$ ou $C = \mathbb{Q}^2$).

L'application racine carrée a pour ensemble de définition $C \cup -C$:

$$\sqrt{\ } : C \cup -C \longrightarrow \mathbb{Q}$$

Une différence de traitement de l'équation "$x^2 = a$", pour a négatif et "$a = -b^2$" avec b rationnel positif, apparaît ici : une solution est donnée sous l'une des deux formes $x = b$ ou $x = -b$.

- **Les modèles Approximation CA et CA≈**

L'objet racine carrée se présente en Quatrième sous l'aspect d'un algorithme "racine carrée calculatrice" :

$\sqrt{}$ (cal) : a -------> c où c est la valeur approchée lue à la calculatrice.

Le modèle CA≈

Un rapport au nombre de type CA≈ se caractérise par le fait que les nombres obtenus avec les quatre opérations et les opérateurs racine carrée, cosinus, ..., ne sont pas assimilés aux valeurs approchées - notamment celles obtenues à l'aide de la calculatrice. La différenciation valeurs exactes/valeurs approchées est effective. Dans ce type de rapport personnel au Numérique, l'espace numérique peut être réduit à une partie de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$. Une évolution n'est possible qu'avec la reconnaissance de nombres non-décimaux - que nous avons appelé les nombres idécimaux [A. BRONNER, 1997] - et des irrationnels.

Le modèle CA

Le modèle CA est un rapport qui est, en quelque sorte, "dégénéré" du rapport CA≈, mais devrait apparaître dans les apprentissages avant le modèle CA≈. L'opérateur racine carrée est assimilé à l'algorithme-opérateur "racine carrée" :

$\sqrt{}$ (cal) : SN_+ ----> $\mathbb{D}_+$.

a ----> c (où c est une valeur approchée lue à la calculatrice).

Les modèles CN

Dans ces modèles, les quotients d'entiers et les racines carrées des nombres rationnels positifs, sont considérés comme des nombres : ils servent à mesurer certaines grandeurs et à faire des calculs algébriques - notamment à résoudre certaines équations. Les racines carrées $\sqrt{a}$ ont des propriétés opératoires : elles peuvent être comparées, ajoutées, multipliées, ... L'ensemble de définition de la fonction racine carrée est un ensemble contenant $\mathbb{Q}_+$.

Dans le modèle **CN**, le système de nombres est un ensemble contenant au moins les rationnels et les racines carrées de rationnels positifs. Plusieurs niveaux sont distingués en partant du cas où SN est réduit aux nombres cités jusqu'au cas où il est égal à l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Malgré l'extension de l'espace numérique, il reste à intégrer tous ces nombres dans un même système de nombres.

1.1.2. Le test diagnostique

Nous avons proposé une situation de test diagnostique dans une classe de Troisième (que nous nommons classe T1) avant la séquence sur la racine carrée. Il n'y a pas eu d'apprentissage spécifique sur la racine carrée en dehors de "la touche racine carrée" en classe de Quatrième.

Le test

Exercice 1 :

Dans le tableau ci-dessous, on passe de la 1ère ligne à la 2ème en élevant au carré. Compléter les cases vides du tableau avec des nombres, si cela est possible :

x	2	1,2	11		1,7		-2	
x^2	4	1,44		16		49		13

x		$\frac{2}{3}$			4,51				
x^2	-9		-7	$\frac{16}{25}$		0,9	$\frac{9}{5}$	2,8	$-\frac{35}{49}$

Indiquer pourquoi vous ne pouvez pas remplir certaines cases.

Exercice 2 :

a) Dessiner un triangle ABC rectangle en A et écrire la relation de Pythagore dans ce triangle. On suppose que les mesures des côtés, en cm, sont AB = 6 et AC = 8. Calculer BC si cela est possible.

b) Même question avec AB = 3 et AC = 2

Exercice 3 :

a) Dessiner un carré dont les côtés mesurent 3 cm. Calculer le périmètre P et l'aire A de ce carré.

b) Peut-on trouver un carré de périmètre 28 cm ? Si oui, calculer la longueur des côtés. Même question avec 42 cm.

c) Peut-on trouver un carré d'aire 36 cm^2 ? Si oui calculer la longueur des côtés. Même question avec 17 cm^2.

Exercice 4 :

Trouver toutes les valeurs de x vérifiant :

a) $3x + 5 = 16$

b) $x^2 + 5 = 9$

c) $x^2 + 8 = 25$

d) $x^2 + 12 = 3$

e) $x^2 + 26 = 19$

Lorsque cela n'est pas possible, essayer de dire pourquoi.

Analyse des exercices selon le cadre, le registre et les objectifs

Type	Cadre et registre[1]	Objectifs
Ex 0 : Existence de racines carrées.	cadre numérique/ registre formel mathématique.	Préciser le domaine de définition de la fonction racine carrée ou de validité des écritures avec radicaux en fonction du radicande.
Ex 1 : calculs d'images et d'antécédents par l'application carré.	cadre numérique/ registre tableau de nombres.	Identifier les différents types de comportement d'élèves dans la recherche de racines carrées dans un registre "tableau" et aussi repérer le fonctionnement de l'opérateur dans ce registre.
Ex 2 : situation classique du théorème de Pythagore où l'on demande de calculer un côté d'un triangle rectangle connaissant les deux autres.	cadre géométrique/ registre verbal.	Préciser les réponses et formulations possibles des élèves après un calcul se ramenant à une équation "géométrique" du type $MN^2=a$, en particulier en utilisant la calculatrice.
Ex 3 : calcul du côté d'un carré de périmètre donné ou d'aire donnée.	cadre géométrique et cadre des grandeurs/ registre verbal.	Repérer les réponses possibles des élèves dans le cadre des grandeurs et de la mesure.
Ex 4 : résolution d'équation.	algébrique/ registre formel mathématique.	Repérer les niveaux de fonctionnement et les degrés de maîtrise dans la résolution d'équations se ramenant à $x^2 = a$.

[1] Il s'agit de registres de représentation sémiotique au sens de [DUVAL R., 1993].

1.2. Les différents rapports personnels dans la classe de Troisième T1 (avant la séquence d'enseignement sur la racine carrée)

Nous allons montrer comment les différents écrits des élèves nous ont permis d'analyser les rapports personnels des élèves de la classe T1, mais aussi le rapport institutionnel pour l'élève mis en place en Quatrième.

1.2.1. Le rapport institutionnel pour les élèves de cette classe en début de Troisième

Ces élèves n'ont pas eu de cours spécifique sur la racine carrée en classe de Quatrième et ont utilisé seulement la touche racine carrée de la calculatrice pour conclure dans les situations d'apprentissage du théorème de Pythagore. En effet, en Quatrième l'enseignant de la classe n'a pas introduit l'usage du symbole "√" et n'a pas proposé un enseignement sur la racine carrée.

1.2.2. Les différents rapports chez les élèves de la classe T1

Le tableau ci-dessous récapitule les modèles attribués selon la typologie précédente.

Modèles	CP	CA	CF	CA≈	CN	non attribué	Total
Nombre	8	4	1	6	1	0	20

1.2.3. Le groupe "CP" et les dérivés "CP-N", "CP+D/2"

8 élèves (sur 20) relèvent du modèle CP. On retrouve les caractéristiques générales de ce modèle.

Ensemble de définition de la fonction racine carrée et espace numérique des élèves :

- A l'exercice 1 ces élèves ne remplissent pas la première ligne pour $x^2= 13$; 0,9 ; 9/5 ; 2,8.

Si nous considérons seulement ces réponses brutes du tableau nous n'avons pas assez d'éléments pour repérer le rapport personnel des élèves à l'objet racine carrée. Le fait de ne pas donner de réponse à $\sqrt{13}$ peut être lié à des connaissances très différentes et plus ou moins conformes. Les raisons peuvent être :

- ils ne trouvent pas de nombre entier qui a pour carré 13 ;
- ils ne trouvent pas de nombre décimal qui a pour carré 13 ;
- ils se rendent compte qu'ils ne possèdent pas d'autres écritures possibles pour $\sqrt{13}$;
- ils imaginent qu'ils y a d'autres chiffres que ceux donnés par la calculatrice et ils ne savent comment les trouver.

Il est donc nécessaire d'avoir recours aux écrits des élèves pour essayer de préciser le rapport personnel des élèves à l'objet racine carrée. Dans ce groupe, les arguments sont en général du type *"Le nombre ... n'est pas un carré "*. Par exemple, l'élève 1, après avoir "transformé" à l'item c de l'exercice 4 l'équation en $x^2 = 17$, écrit *"je ne peux pas trouver x car 17 n'est pas un carré "*.

- De la même façon, nous avons encore à l'exercice 3 : *"Non on ne peut pas trouver un carré d'aire 17 cm^2 car 17 n'est pas un carré"*.

- A l'exercice 2 sur la recherche d'un côté d'un triangle rectangle connaissant les deux autres, on pouvons trouver des arguments du type : *"13 = BC^2 on ne peut pas savoir la mesure de BC car 13 n'a pas de carré"* (élève 20).

Ces écrits nous permettent de préciser les connaissances des élèves et en particulier de noter la présence du théorème-en acte : "la (ou une) racine carrée de a existe si et seulement si a est un carré parfait de l'espace numérique de l'élève".

Le cas des valeurs négatives pour x^2

Au niveau du tableau, des élèves rejettent les racines carrées des nombres négatifs -9 ; -7 ; $-\frac{35}{49}$ avec diverses raisons :

- elles peuvent être liées à l'espace numérique de l'élève ;
- elles peuvent être liées aux connaissances sur le signe d'un carré ;
- elles peuvent être liées à des arguments basés sur des produits particuliers.

Par exemple :

Pour un élève (élève 6) le caractère positif d'un carré ne semble pas disponible et il revient à l'argument général que ces nombres ne sont pas des carrés traitant de la même manière 13 ; -9 ; -7 ; $-\frac{35}{49}$

Les élèves (élèves 1 et 13) donnent bien comme argument pour -9 ; -7 ; $-\frac{35}{49}$ que *"le carré d'un nombre est toujours positif"* traitant tous les négatifs de la même manière. De même à l'exercice 4, ils ne trouvent pas de solution dans les équations équivalentes à x^2 = a avec a négatif : *"On ne peut pas trouver x car le carré d'un nombre n'est jamais négatif"*.

Pour les deux autres (élèves 11 et 20), le rejet de l'existence d'une racine carrée de -9 semble procéder de deux étapes. Ils ne considèrent comme nombres, pouvant intervenir comme facteurs dans le carré, que les nombres 3 et -3, en envisageant peut être implicitement la valeur absolue du nombre (-9). Ensuite, ils essaient les différents produits 3x3, (-3)x(-3) ou (-3)x3 et ils constatent que cela ne donne pas -9 ou alors que les deux facteurs ne sont pas égaux comme dans le dernier produit : *"Pour -9 si je fais -3x3 cela fera 9 et non -9 je pourrais faire -3x3 ce qui donnerait -9, mais ce ne serait pas bon car je dois multiplier par le même nombre"* (élève 11).

Là encore, l'écrit est décisif pour se déterminer sur les raisons du rejet de certaines valeurs négatives.

L'opérateur racine carrée

Les situations font ressortir pour certains élèves un besoin et une recherche d'un tel opérateur. Les écrits complémentaires des élèves montrent qu'ils ressentent le vide d'un opérateur réciproque. En effet :

- Pour - 9 ; -7 ; 0,9 ; et 2,8 l'élève 6 écrit *"Je n'arrive pas à trouver l'inverse de (x^2)"* ;
- Pour l'élève 1 *"Je ne sais pas passer de x^2 à x "*.

Un modèle dérivé : CP+D/2

L'élève (2) a un rapport globalement conforme au modèle CP. Cependant, cet élève fait aussi apparaître localement l'opérateur racine carrée comme ayant même effet que la division par 2. Nous relevons dans ces écrits : *"On ne peut pas remplir certaines cases parce que quand on prend la moitié d'un chiffre, certains ne sont pas égaux"*. Cela est confirmé aussi à l'exercice 3 où cet élève, pour la recherche du côté d'un carré d'aire 17 cm^2, déclare : *"17 c'est 8,5x8,5, donc 8,5 est la longueur des côtés "*. En s'appuyant sur ses écrits, nous pouvons avancer que cet élève utilise pour certains nombres une procédure division par deux comme opérateur de racine carrée. Ce sous-modèle sera noté CP + D/2 dans la suite.

1.2.4. Le groupe d'élèves CA

La prise en compte de tous les types d'écrits (écrits mathématiques et écrits complémentaires) nous ont permis de différencier les comportements de certains élèves de ce groupe :

Le type "standard"

Lorsque a n'est pas carré parfait les solutions sont données par des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ données par l'affichage de la calculatrice. En effet, l'élève 12 donne 1,3416408 comme racine carrée de 9/5, trouve pour le côté du carré d'aire 17 cm^2 4,1231056 et écrit " *oui, car 4,1231056 x 4,1231056 = 17 cm^2* ".

Le type "normalisateur"

Certains élèves donnent, assez systématiquement, les réponses sous forme d'écritures décimales normalisées, même lorsque la calculatrice donne des écritures décimales exactes. Ainsi l'élève 14 normalise à deux chiffres après la virgule :

- 3,60 ; 0,94 ; 1,34 ; 1, 67 comme racine carrée respective de 13 ; 0,9 ; 9/5 ; 2,8 dans le tableau de l'exercice 1 ;

- mais aussi 20,34 comme carré de 4,51 (la valeur exacte étant 20,3401). Nous interprétons ce comportement comme une "identification" des nombres modulo 1/100).

Le type "affichage flottant"

L'élève 7 fournit un nombre de chiffres après la virgule très variable selon les nombres :

- par exemple 3,605 ; 0,3 ; 1,34 ; 1,67 comme racine carrée respective de 13 ; 0,9 ; 9/5 ; 2,8 à l'exercice 1 ;

- et à l'exercice 4, pour l'équation $x^2 = 17$, il répond " *$17\sqrt{x}$ = 4,123* " ;

- " *$17\sqrt{x}$ = 4,123105626, le côté n'est pas exact, donc 17 cm^2 pour aire n'est pas bon, on ne peut pas trouver un côté exact* ".

Les écrits de cet élève montrent que le type de réponses (nombre de chiffres après la virgule, existence ou non du nombre) est fortement lié à la nature du cadre. Sans les écrits complémentaires exigés, nous n'aurions pas pu accéder à un raisonnement non conforme d'un élève. En effet, dans le tableau les réponses de cet élève concernant les nombres négatifs -9 et -7 sont correctes, mais en fait le rejet est appuyé uniquement sur le message de la calculatrice. Au lieu d'analyser le nombre, son écriture, son signe, ..., l'élève entre l'expression numérique dans la calculatrice et donne un résultat strictement conforme à celui de l'écran : *"On ne trouve à la calculatrice aucun carré de -9 et de -7"*. Nous voyons ici comment l'écrit nous permet d'observer un cas de dépendance de la calculatrice.

1.2.5. Le groupe d'élèves CA≈

Certains élèves répondent systématiquement selon le rituel vu en Quatrième sur les situations de Pythagore. Ils utilisent le symbole ≈ pour écrire le résultat ou ils fournissent une valeur décimale avec une "précision". Les deux peuvent se combiner. Il en est de même pour d'autres expressions numériques, par exemple des produits ou des quotients, comme nous pouvons le voir dans les productions écrites d'élèves :

L'élève (3) déclare pour le premier exercice avec le tableau *"On ne peut pas mettre un chiffre à peu près égal à son carré"*, et fournit les réponses suivantes :

dans le cadre algébrique (exercice 4) :

- à l'item a) "$x = \frac{16-5}{3}$" , puis "*$x \approx 3{,}67$ au $100^{ème}$ près*" ;
- à l'item c) "*$x^2 = 17$*", puis " *$x \approx 4{,}12$ au $100^{ème}$ près*"

dans le cadre géométrique (exercice 3) :

- à l'item c) pour le côté du carré d'aire 36 cm^2, puis 17 cm^2
  - * *"Aire = 36 cm^2 --> 36 est le carré de 6 --> 6 = côté du carré"*
  - * *"Aire =17 cm^2 --> 17 est le carré de ≈ 4,1 --> 4,1 = côté du carré".*

Chez l'élève (5) on décèle une gestion différente et erronée des approximations :

dans le cadre algébrique

- à l'item a) "*$x = \frac{11}{3}$*" , puis "*$x \approx 3{,}666666667$* " et en dessous "*3,7 au milliardième près*" ;
- à l'item c) "*x = 17*", puis " *$x \approx 4{,}2$ au dixième près*"

dans le cadre géométrique (exercice 3), à l'item c) pour le côté du carré d'aire 17 cm^2 "$c^2 = 4{,}2 \times 4{,}2 \approx 17$", puis "*au centième près donc les côtés mesurent 4,2 cm*".

Les valeurs données sont reconnues comme des valeurs approchées des expressions cherchées et non des valeurs "exactes". Par exemple, l'élève 16, après avoir donné $x = \sqrt{4} = 2$ pour $x^2 = 4$, va écrire pour la résolution de $x^2 = 17$: "*On ne peut pas car on aurait qu'une valeur approchée*" - toujours après avoir barré le mot "*inexacte*".

L'élève 17 de ce groupe fournit bien "$x = \frac{11}{3}$" comme solution de l'équation $3x+5 = 16$. Mais pour $x^2 = 17$, après avoir écrit "*x = 0,1176 à 0,01 près*", conclut que ce n'est pas possible parce que "*ce n'est pas un nombre à virgule*". Un fonctionnement et un traitement différent entre racines carrées et quotients sont ainsi repérables chez certains élèves par l'intermédiaire de leurs écrits.

1.2.6. Un élève CF

L'élève 8, redoublant de Troisième, connaît le symbole radical $\sqrt{}$ et l'utilise pour produire comme réponse la suite d'équations : $x^2 + 8 = 25$, $x^2 = 25 - 8$, $x^2 = 17$, $x = \sqrt{17}$.

A ce niveau, la réponse semble conforme à l'attente institutionnel. Mais l'écrit complémentaire suivant "*Il me manque une opération pour trouver x =*" montre qu'il s'agit d'une transformation formelle en utilisant le symbole radical, mais pas vraiment d'un opérateur arithmétique permettant de trouver des valeurs numériques. Les racines carrées n'ont donc pas pris un statut de nombre. Autrement dit cet élève relève d'un modèle CF.

1.2.7. Un élève CN

Un seul élève de cette classe semble relever du modèle CN. En particulier, il exprime la mesure du côté du carré d'aire 17 comme $\sqrt{17}$. Bien que présentant des comportements relevant du modèle CN, les apprentissages ne sont pas encore stabilisés. En regardant de près ces écrits, nous observons, qu'au niveau de l'exercice 1, l'élève (4) a répondu dans un premier temps : "*Pour 13^2 on ne peut mettre la valeur de x, parce qu'elle ne tombe pas juste*" et "*je ne peux pas le faire pour $\frac{9}{5}$ parce que la racine carrée n'est pas entière*". Ensuite se ravisant, il a barré ces commentaires et a répondu avec des radicaux. Des apprentissages de Quatrième et de Troisième ont eu lieu pour cet élève, mais ils sont encore bien fragiles.

1.2.8. Les rapports personnels à la nature du nombre

La notion de racine carrée est un bon révélateur de rapport personnel à l'objet nombre et les écrits complémentaires des élèves nous permettent de préciser ces rapports en relation à la nature du nombre.

Les décimaux

L'élève 12 écrit "*2,8 n'a pas de racine carrée car 28 n'a pas de racine carrée*". Il traite les décimaux comme des entiers.

Les rationnels

L'élève 6 dit qu'il n'arrive pas à remplir certaines cases du tableau *"car ce sont des fractions "*. A l'exercice 4 une erreur l'amène à écrire x = $\frac{16}{3}+5$, qu'il remplace alors par 10,33....

Quant à l'élève 12, il ne trouve pas de racine carrée pour $-\frac{35}{49}$, non pas en raison du signe de ce nombre, mais en faisant référence aux écritures. Il déclare *"Dans la dernière case* $-\frac{35}{49}$ *ne peut se simplifier car quand <u>on transforme la fraction en nombre</u> le résultat est trop complexe"* (c'est nous qui soulignons).

Les nombres idécimaux [BRONNER, 1997]

Dans cette classe, les rapports personnels aux objets "nombre réel" et "racine carrée" sont du type CP, CF, CA ou CA≈. Différents facteurs se conjuguent pour provoquer des difficultés chez les élèves dont nous allons montrer des indices à travers les formulations écrites des élèves :

- A propos de l'exercice 4 sur les équations *"le a), c), d), e) ne sont pas des nombres précis, alors ça ne peut tomber juste"*.
- Un élève donne bien $\sqrt{13}$ dans le tableau et dans le calcul de BC, ou encore $\sqrt{17}$ dans les exercice 3 et 4, mais une gêne apparaît : il dit qu'il ne peut remplir les cases du tableau "parce *que je ne connais pas de valeur juste de certains nombres"* et pour les autres exercices *"le résultat ne tombe pas juste"*.

Les expressions des élèves laissent penser qu'ils ne conçoivent pas de nombres en dehors des décimaux et qu'ils recherchent des valeurs décimales.

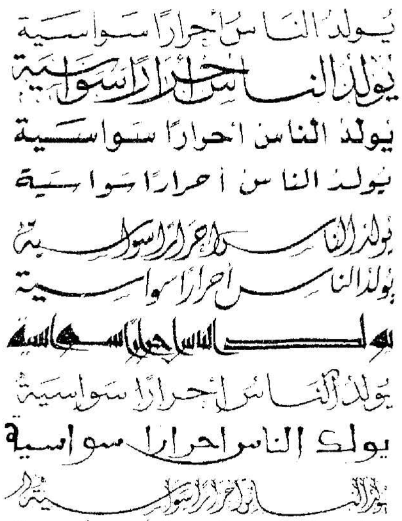
Certains élèves de type CA≈ commencent à construire une nature différente pour certains nombres :

par exemple un élève écrit à propos de l'exercice 3 : *"17 n'est pas le carré d'un nombre qui s'arrête ; c'est un nombre indéfini "*. Il récidive à l'exercice 4 après avoir écrit x = $\sqrt{17}$: *"mais je ne peux pas aller plus loin comme pour l'exercice précédent ; x est un nombre indéfini* $x = \sqrt{17} = 4{,}12...$ *"*.

1.2.9. Bilan sur le rôle de l'écrit comme moyen d'accès aux rapports personnels des élèves

Les écrits mathématiques standards que produisent les élèves en réponse à des exercices ne sont pas suffisants pour repérer la nature de leurs connaissances. Nous avons montré comment des écrits complémentaires sont indispensables pour avoir une idée plus précise de ces connaissances et pour aller au-delà du verdict juste/faux. Nous avons amené les élèves à donner des écrits explicatifs de certaines réponses par certaines consignes ou types de formulations.

Ainsi dans l'exercice 1 et dans l'exercice 4 nous l'avons demandé explicitement, alors que nous avons laissé les questions ouvertes aux exercices 2 et 3. Les explications demandées ont permis de situer les élèves dans la typologie de rapports aux objets "nombre réel" ou "racine carrée". De plus, les explications complémentaires rajoutées par les élèves ont permis de différencier la position de certains élèves malgré des réponses mathématiquement identiques ou relativement proches. La demande institutionnelle pour une évaluation sommative de l'élève quant à la rédaction d'un problème reste insuffisante. Le contrat habituel de "rédaction" entre l'élève et le professeur doit être rompu si on veut accéder au rapport personnel d'un élève concernant une notion donnée. Il faut modifiant la rédaction de l'énoncé d'un problème et des consignes, si on veut obtenir des écrits significatifs permettant d'accéder au rapport personnel à un objet.



La phrase "tous les hommes naissent libres et égaux en droit" transcrite selon différents styles d'écriture.

2. L'écrit comme moyen de conflit socio-cognitif pour construire des connaissances nouvelles

2.1. La photographie de la classe

Nous allons montrer ici une situation 1 - "la situation tableau" - dans laquelle des écrits vont intervenir pour modifier un milieu [BROUSSEAU 1990] de façon à créer un conflit socio-cognitif. Le but de la situation est de modifier le rapport personnel des élèves à l'objet racine carrée élaboré en classe de Quatrième et de construire de nouveaux savoirs sur la racine carrée.

2.1.1. Description de la "situation tableau"

La situation prend racine sur l'exercice 1 du test diagnostique. Individuellement et en classe, les élèves ont à résoudre les exercices du test diagnostique (décrit au paragraphe 1.1.2.), deux semaines avant la situation "Tableau". Les élèves sont mis en groupe pour critiquer les réponses de certains élèves de la classe et répondre en groupe à cet exercice. Nous avons constitué ainsi un écrit comportant des productions d'élèves typiques de certains rapports à la racine carrée. La fiche contenant ces productions est appelée **la photographie de la classe**. Ce travail en groupe est suivi d'une phase de bilan organisée sous forme d'un débat en classe entière dont l'objectif est de montrer l'insuffisance de certaines productions et le besoin d'une nouvelle connaissance à propos de la racine carrée. La calculatrice est autorisée dans cette situation. La tâche des élèves contient ainsi deux parties, non séparées dans le temps. Chaque groupe produit une analyse critique de chaque production et la formule sur une feuille (dite feuille de critiques) distribuée par l'enseignant. En particulier, les élèves doivent indiquer les réponses qu'ils considèrent fausses en justifiant leurs propos. Ils sont aussi invités à produire un "corrigé type" de l'exercice 1 du test sur une nouvelle feuille.

- **Le matériel**

Les élèves disposent d'une fiche d'exercice, d'une feuille de consignes, et de la fiche "photographie de la classe".

La feuille d'exercice pour le travail de groupe

Voici l'énoncé d'un exercice sur lequel tu as déjà travaillé :

Exercice 1 : Dans le tableau ci-dessous, on passe de la 1ère ligne à la 2ème en élevant au carré. Compléter les cases vides du tableau avec des nombres si cela est possible :

x	1,2	11		1,7		-2		
x^2	1,44		16		49		13	-9
x	$\frac{2}{3}$			4,51				
x^2		-7	$\frac{16}{25}$		0,9	$\frac{9}{5}$	2,8	$-\frac{35}{49}$

Indiquer pourquoi vous ne pouvez pas remplir certaines cases :

La photographie de la classe

Cette fiche (voir annexe 1) a été construite avec 4 productions réelles de la classe faisant ressortir des modèles différents et utilisant différents écrits porteurs de connaissances sur lesquelles nous voulons les faire travailler :

- La réponse de **Sonia,** relevant du modèle CP, ne donne pas de racines carrées pour les nombres non carrés parfaits. Les commentaires montrent qu'il y a une recherche implicite d'un opérateur réciproque de l'élévation au carré (*"je ne sais pas passer de x^2 à x"*).
- La réponse de **Xavier**, qui relève du modèle CF, produit un comportement analogue à celui de l'élève précédent, mais nous l'avons rajouté à cause de la précision de ses réponses concernant les nombres (*"0,9 et 2,8 ne sont pas des carrés"*).
- La réponse de **Romain**, relevant du modèle CA, donne les racines carrées de nombres non carrés parfaits, systématiquement, avec deux chiffres après la virgule. Il normalise de la même manière les résultats pour le calcul de carré de décimaux. De plus, dans ces écrits, il donne une règle pour rejeter les carrés de nombres négatifs.
- La réponse de **Fabrice**, qui relève de rapport personnel de type CA, mais donne les résultats avec un nombre variable de chiffres après la virgule.

Les consignes données aux élèves

Consignes : Le travail du groupe comporte deux parties. 1) Critiquer les réponses des élèves : - si le groupe les pense bonnes, alors il faut dire pourquoi, - si le groupe les pense fausses, il faut, aussi, dire pourquoi. Vous devez écrire cela sur la feuille de critiques. 2) Après s'être mis d'accord à l'intérieur du groupe, reprendre le test et donner les réponses du groupe sur la nouvelle feuille. Un représentant du groupe sera choisi par le professeur pour expliquer les réponses du groupe.

• La constitution des groupes

Les 5 groupes ont été formés de façon à répartir - autant que possible - les différents modèles de notre typologie et plus spécifiquement :

- 1 élève relevant de chaque modèle ;
- 1 élève qui accepte des carrés négatifs ;
- 1 élève qui utilise déjà le symbole radical ;
- 1 élève qui utilise la procédure division par deux.

Ainsi pour chaque groupe, cette diversité permet d'éviter qu'il y ait une idée dominante concernant la notion de racine carrée et laisse une large place aux échanges. De plus, nous avons tenu compte d'un autre facteur : les relations sociales interindividuelles dans le groupe.

Tableau de répartition des élèves[2]

GROUPE A	GROUPE B	GROUPE C	GROUPE D	GROUPE E
4 (CN)	14 (CA)	12 (CA)	15 (CA≈)	19 (CP - N)
18 (CA et D/2)	17 (CA≈)	16 (CA≈)	8 (CF)	9 (CA≈)
5 (CA≈)	11 (CP)	10 (CP et D/2)	2 (CP)	3 (CA ≈)
20 (C P)	6 (CP)	1 (CP)	13 (CP)	7 (CA)

2.1.2. Analyse des choix concernant les différents écrits de cette situation

Le milieu de cette situation contient des écrits qui ont des statuts différents : la feuille de consignes qui permet de préciser ce qu'on attend des élèves, la fiche de l'exercice 1 qui est le support mathématique et la photographie de la classe présentant des productions correspondant à des rapports différents à la racine carrée. D'autres éléments sont importants dans le milieu comme les partenaires de l'élève dans le groupe ou la calculatrice comme moyen de calcul.

En dehors de certains éléments particuliers comme la photographie de la classe, le type même de consignes doit conduire à rompre le contrat type d'une rédaction de problème. Car, pour nous, l'important n'est pas tant la réponse au problème que le pourquoi de la réponse. Il faut donc attirer l'attention des élèves sur notre intention, et assurer une dévolution du type de tâche demandée aux élèves. Nous avons explicitement écrit les consignes, et nous les avons distribuées à chaque élève. Ainsi, les élèves doivent clairement comprendre qu'ils doivent se lancer dans une phase de critiques des productions des élèves, et nous avons particulièrement insisté, par écrit puis oralement, sur le fait que le travail doit se dérouler en groupe. Nous pensons que la contrainte de formuler par écrit les réponses du groupe va contraindre plus fortement les élèves à s'entendre entre eux et à produire une seule réponse.

L'écrit, "la photographie de la classe", permet d'enrichir le milieu. Notamment, les élèves sont confrontés à des réponses différentes qui peuvent remettre en question leur rapport personnel à la racine carrée. L'écrit proposé présente l'avantage de permettre à chaque élève de se confronter de façon précise à de nombreux points de vue existant dans la classe. Nous allons dans un premier temps, nous appuyer sur des productions écrites d'élèves pour montrer aux élèves des rapports à la racine carrée très différents. Pour cela nous donnons des réponses numériques différentes dans le tableau. Mais aussi, nous présentons des écrits d'élèves qui éclairent leurs rapports personnels à la racine carrée ou alors qui parlent de problèmes liés à la racine carrée ou à la nature des nombres, que nous voulons absolument voir discuter dans les groupes.

Nous faisons l'hypothèse que cet écrit va permettre un travail réflexif sur les productions personnelles des élèves au test. De plus, nous pensons que le fait que ces écrits proviennent d'élèves de la classe facilite la dévolution de la situation aux élèves et, peut être, aussi une certaine motivation. Mais des inconvénients peuvent aussi se présenter en donnant des réponses réelles de certains élèves de la classe. Ces élèves dont les productions se retrouvent sur la photographie de la classe peuvent être perturbés de voir leurs réponses devenir publiques et devenir objet d'une activité.

[2] les numéros correspondent aux numéros d'élèves du paragraphe 2.

Ainsi le travail en groupe et les différents écrits supports de l'activité doivent permettre de faire vivre et d'opposer plus d'idées différentes mais aussi va permettre de créer les conditions d'un conflit socio-cognitif. Au fur et à mesure du travail en groupes, nous espérons que les rapports personnels des élèves à la racine carrée vont se modifier et que le meilleur moyen de mesurer cette évolution est d'imposer aux groupes de remplir à nouveau la fiche du pré-test, en précisant bien que nous voulons une réponse du groupe après entente entre tous. Nous pensons qu'une seule activité ne suffit pas pour faire évoluer les rapports personnels des élèves, mais notre objectif est qu'ils aient conscience que leurs rapports personnels à l'objet racine carrée et au nombre sont insuffisants.

2.1.3. Analyse a posteriori de la situation 1 dans la classe T1 et rôles effectifs joués par les différents écrits

On constate que la majorité des élèves se lancent sur la calculatrice et "zappent" pour vérifier les résultats des autres élèves. Ce n'est qu'ensuite qu'ils échangent, critiquent les productions de la photographie de la classe, et remplissent un nouveau tableau.

Les réponses des groupes se répartissent en deux grands types :

Deux groupes du type CA (que l'on note CA1 et CA2) : ils donnent en général les résultats affichés par la calculatrice.

- **Le groupe CA1** est un groupe dont les réponses sont strictement conforme au modèle CA. Les élèves se rallient à la position de Fabrice. Deux élèves de type CP ont bougé, mais les résultats ne sont pas très assurés.

- **Le groupe CA2** fournit des valeurs différentes du premier. Ceci est dû au fait qu'un élève a une calculatrice à 10 chiffres[3], et le groupe retient les valeurs obtenues avec cette dernière. Ce groupe CA2 se distingue surtout du premier par un autre fait. Il donne 3,6055513 pour $\sqrt{13}$, et 1,673320053 pour $\sqrt{2{,}8}$, mais va changer de type de réponse pour 0,9 et $\frac{9}{5}$ pour lesquels ils rejettent l'existence des racines carrées. La structure particulière de ces nombres est-elle en cause ? 5 n'est pas un carré parfait (d'entier), et on peut vouloir conserver la forme d'écriture fractionnaire. Pour 0,9, le résultat à la machine est "trop" différent du nombre du départ, les élèves indiquent alors *"0,9 je ne peux pas trouver x car le résultat ne tombe pas juste"*.

Deux groupes CP (CP1 et CP2) : il y a rejet des racines carrées de nombres non carrés parfaits. Malgré la diversité des rapports personnels et la présence d'élèves donnant des valeurs approchées décimales (donc de type CA), le travail de groupe a conduit à un rapport institutionnel de type CP. Si on suppose que les élèves adoptent la position institutionnelle du groupe, de nombreux élèves ont bougé. En effet, 6 élèves sur les 8 de ces deux groupes avaient des rapports personnels de type CA, et semblent accrocher aux réponses de Sonia (qui faisait partie du groupe CP1) et de Xavier de type CP. Les groupes CP1 et CP2 reprennent d'ailleurs la même justification que Xavier, *"13, $\frac{9}{5}$, 0,9 , 2,8 ne sont pas des carrés"*.

Un groupe (noté **S**) : dans un premier temps les élèves ont utilisé un symbole radical, et écrit $\sqrt{2{,}8}$ par exemple, mais dans le bilan au tableau ils annoncent que *"le nombre est infini"*.

---

[3] C'est le seul élève de la classe à avoir une telle calculatrice, tous les autres élèves ont une calculatrice à 8 chiffres.

Cette expression peut être interprétée comme nombre ayant une écriture décimale illimitée, en relation avec la propriété : la racine carrée d'un nombre non carré parfait est un idécimal.

Cette situation a permis de faire évoluer certaines réponses au niveau du groupe. Tous les groupes ont répondu que les nombres négatifs n'ont pas de racine carrée, mais un groupe justifie (encore) cette propriété par la sanction de la calculatrice "Error". Les réponses faisant appel à une procédure de division par 2 (D/2) ont disparu.

Les réponses du groupe ont évolué par rapport aux productions personnelles. Il subsiste des réponses différentes. Lors des travaux de groupes, le travail de réflexion des élèves s'appuyait en permanence sur la photographie de la classe. Les écrits proposés dans cette fiche étaient souvent utilisés dans les échanges à l'intérieur du groupe. Par exemple, le groupe CP2 écrit *"les réponses de Xavier sont justes* ; *Sonia ne savait pas passer de x^2 à x, et elle s'est trompé à* $\frac{16}{25}$; *Romain et Fabrice ont arrondi un nombre à virgule".*

Ainsi, le nouveau milieu et notamment l'écrit des élèves, a provoqué un conflit socio-cognitif qui a conduit à déstabiliser certains rapports personnels des élèves et à pousser les élèves à s'accorder sur une nouvelle réponse à l'exercice dans chaque groupe. Des rapports différents et non idoines subsistent encore ; ce qui montre la nécessité de nouvelles situations.

Deux arbres : le bois

Trois arbres : la forêt

Lune + soleil = la lumière

2.2. Le tableau noir

Nous montrons dans ce paragraphe que le tableau noir de la classe est un support pour un écrit - volatile - qui occupe une place importante et joue un grand rôle dans la classe. Le caractère évident de sa présence tend à naturaliser l'importance qu'il peut avoir dans certaines situations. En particulier, une certaine gestion des activités de classe conduit à lui faire jouer un rôle analogue à la photographie de la classe.

2.2.1. La constitution d'un nouvel écrit

Par exemple, nous avons prolongé la situation précédente par une phase de bilan, en classe entière, qui conduit à présenter une nouvelle photographie de la classe au tableau.

À la suite de la situation précédente, le professeur a rassemblé les résultats des groupes à l'exercice au tableau comme ci-dessous (chaque ligne correspond à un même groupe) :

x	2	1,2	11	**"4"** **"4"** **"4"** **"4"** **"4"**	1,7	**"7"** **"7"** **"7"** **"7"** **"7"**	-2
x^2	4	1,44	**"121"** **"121"** **"121"** **"121"** **"121"**	16	**"2,89"** **"2,89"** **"2,89"** **"2,89"** **"2,89"**	49	**"4"** **"4"** **"4"** **"4"** **"4"**

Tableau : en gras les réponses des élèves

x	**"3,6055513"** **"non"** **"non"** **"3,605551275"** **"nombre infini"**	**"non"** **"non"** **"non"** **"non"** **"impossible"**	$\frac{2}{3}$	**"non"** **"non"** **"non"** **"non"** **"impossible"**	**"4/5"** **"4/5"** **"4/5"** **"4/5"** **"0,8"**	4,51
x^2	13	-9	**"4/9"** **"4/9"** **"4/9"** **"4/9"** **"4/9"**	-7	$\frac{16}{25}$	**"20,3401"** **"20,3401"** **"20,3401"** **"20,3401"** **"20,3401"**

Tableau (suite) : en gras les réponses des élèves

x	**"0,9486833"** **"non"** **"non"** **"non"** **"nombre infini"**	**"1,341608"** **"non"** **"non"** **"non"** **"nombre infini"**	**"1,673320"** **"non"** **"non"** **"1,673320053"** **"nombre infini"**	**"non"** **"non"** **"non"** **"non"** **"impossible"**
x^2	0,9	$\frac{9}{5}$	2,8	$-\frac{35}{49}$

Tableau (fin) : en gras les réponses des élèves

Le professeur constitue ainsi un nouvel écrit que nous désignons symboliquement sous le terme de "tableau noir". Cet écrit va être donné à voir publiquement à toute la classe. Le "tableau noir" va permettre à toute la classe de débattre et va servir à provoquer un conflit intergroupe. Le nouvel écrit a une structure différente, il rassemble dans un même tableau les réponses de chaque groupe à un même item. Il a l'avantage d'opposer et de comparer plus facilement les réponses et surtout, il a l'avantage de montrer clairement que les groupes ont eu des réponses très différentes à certains items, ce qui va obliger chaque élève et chaque groupe à aller plus loin dans sa réflexion pour essayer de trouver des arguments convainquants pour les autres. Ce nouvel écrit va créer un nouveau conflit socio-cognitif, en effet, après le travail de groupe, les élèves pouvaient estimer avoir terminé le travail sur cet exercice. Maintenant c'est le professeur qui gère le débat sur cet écrit. Il va se centrer sur chaque item et obliger les élèves à continuer leur réflexion.

De plus, cet écrit, à travers le "tableau noir", donne un caractère plus officiel aux connaissances en jeu dans la classe. C'est un pas vers la constitution de ce qui sera officialisé dans la classe.

2.2.2. Analyse a posteriori et déroulement

Un premier constat est que ce nouvel écrit appelé "tableau noir" a bien joué son rôle déstabilisateur auprès des élèves. Une fois le "tableau noir" sous les yeux, les élèves de la classe se sont remis à chercher, à l'aide de leurs calculatrices, ou à échanger entre élèves d'un même groupe pour s'assurer de leurs réponses.

Le groupe CA2 s'est, particulièrement, remis en cause car il était très sûr de sa réponse pour le nombre qui a pour carré 13 étant donnée la précision de la calculatrice à 10 chiffres.

Le professeur choisit de traiter rapidement les réponses correctes, pour porter le débat sur les cas où il y a désaccord entre les groupes. Nous donnons ci-dessous deux épisodes du débat.

1er épisode : La racine carrée de $\frac{16}{25}$, est-ce 0,8 ou $\frac{4}{5}$?

Nous n'avions pas prévu de traiter cette question, mais les élèves ont obligé l'enseignant à le faire. Quatre élèves n'acceptent pas la réponse 0,8 bien qu'ils conçoivent l'égalité $0{,}8 = \frac{4}{5}$:

- *"puisque c'est une fraction, le résultat doit être une fraction"* ;
- *"quand on donne une fraction, il faut une fraction"*.

Le théorème en acte de conservation de la forme d'écriture des nombres que nous avions déjà repéré nous est explicité clairement. Cet événement créera le doute chez d'autres élèves et le professeur aura du mal à convaincre qu'il s'agit de deux écritures différentes d'un même nombre. Nous voyons ici l'influence de la structure de cet écrit qui a conduit à faire apparaître et à opposer deux écritures d'un même nombre comme réponse à un même calcul.

2ème épisode : Un débat entre élèves sur les valeurs décimales de $\sqrt{13}$

Ici encore cet écrit, au niveau de $\sqrt{13}$, va provoquer un débat sur les écritures d'un nombre. Le professeur réécrit au tableau les deux valeurs décimales "3,6055513" et "3,605551275" données par deux groupes, puis il précise que l'*"on va s'occuper de 13. Est-ce bien les nombres qui ont pour carré 13 ?"* Un débat s'instaure dans la classe :

Xavier confirme le rôle qu'il attribue à la calculatrice : *"Je pense que c'est 3,6055513 car si on fait 3,6055513 au carré (à la calculatrice) on trouve bien 13"*.

Fabrice ne répond pas directement à la question et se rallie à l'une des valeurs proposées, en disant : *"Le carré d'un nombre est toujours positif, étant donné que 13 est positif, il a bien une solution"*.

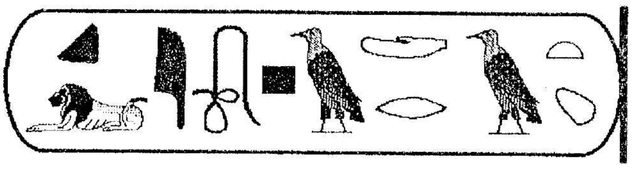
Laurent avance *"Qu'à sa calculatrice à 10 chiffres, $3{,}6055513^2 = 13{,}00000018$, et donc que le premier résultat est faux. Le deuxième est juste car il obtient avec sa calculatrice $3{,}605551275^2 = 13$"*.

La loi de la calculatrice à affichage le plus précis semble régner dans la classe.

Xavier confirme ce fait, puis finit par conclure que *"Cela peut continuer"*, et ajoute *"Les deux sont faux"*.

Laurent revient à la charge avec sa calculatrice en redonnant le calcul dans les deux sens. Il a effectué $3{,}605551275^2 = 13$ et, non tapé à la suite, 13, la racine carrée, puis l'élévation au carré. Il ajoute *"S'il y avait des chiffres derrière cela ne m'aurait pas donné 13"*.

Les deux écrits, "la photographie de la classe" et "le tableau noir", ont effectivement joué le rôle dévolu, à savoir provoquer des conflits sociaux-cognitifs à travers des structures d'écrits différents et des gestions différentes. Ils ont permis de montrer l'insuffisance de certaines connaissances des élèves et ont provoqué un besoin de nouvelles connaissances. Les élèves, avec l'aide du professeur, ont ainsi rejeté toute valeur décimale pour le nombre dont le carré est 13 en raisonnant sur le nombre de décimales du carré d'un nombre décimal.



3. L'écrit comme mémoire de la classe

La situation précédente se termine par un bilan institutionnel local, écrit dans les cahiers des élèves :

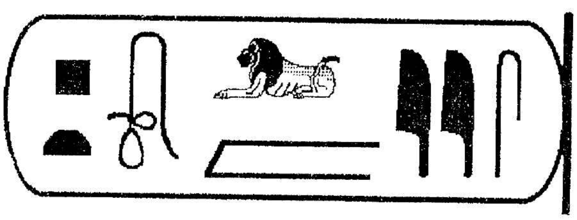
- "Le carré d'un nombre est toujours positif.
- Un nombre négatif n'est jamais le carré d'un nombre.
- On ne trouve ni un nombre entier, ni un nombre décimal, dont le carré est 13 ou 0,9 ou 2,8 ou $\frac{9}{5}$".

L'objectif est de donner du sens aux connaissances qui vont faire l'objet d'une institutionnalisation.

L'institutionnalisation proprement dite pourra avoir lieu pour structurer, pour capitaliser les connaissances en jeu dans la situation, et éventuellement pour amener des nouveaux savoirs qui se fondent sur les connaissances en jeu dans la situation précédente :

On mettra en évidence l'opérateur "racine carrée". La notation $\sqrt{a}$, où a est un nombre positif, est celle d'un nombre, résultat de l'opérateur "racine carrée" appliqué à a, ce résultat pouvant être différent de celui donné par la touche calculatrice. On fera ressortir l'idécimalité de certaines racines carrées, et rappeler celles des fractions.

Ainsi un écrit pourra soit être donné au tableau ou sur fiche, soit faire l'objet d'une trace dans un "cahier de cours". Il va constituer la mémoire de la classe sur les activités menées précédemment et sur les nouveaux savoirs repérés ou introduits par l'enseignant. Il s'agit d'un écrit public qui fixe des éléments du contrat didactique entre le professeur et les élèves à un moment du temps didactique. Nous donnons en annexe 2 l'écrit que nous avons fourni aux élèves peu après la situation "tableau".



4. L'écrit comme moyen d'expliciter les procédures

Nous avons proposé à une autre classe de Troisième (la classe T'1) le problème de la représentation de $\sqrt{3+\sqrt{13}}$ et $\sqrt{\sqrt{7}+3{,}6}$ sur un axe à l'aide d'une courbe représentant la fonction x ---> x^2. L'objectif de cette situation est de faire évoluer les rapports personnels des élèves vers des rapports de type CN et, notamment, d'amener les élèves à donner un statut de nombre à des nombres s'écrivant avec des radicaux et ayant des structures ostensives complexes comme $3+\sqrt{13}$ ou $\sqrt{3+\sqrt{13}}$. Par là, nous souhaitons qu'il en soit de même pour $\sqrt{13}$. La séquence complète est décrite dans [BRONNER, 1997]. Nous allons montrer comment des apprentissages peuvent être obtenus par une demande d'écrits spécifiques.

4.1. Description de la situation 2

Nous fournissons aux élèves une courbe tracée à l'ordinateur (voir annexe 3), qui est un outil pratique pour la représentation de certains nombres. D'après les caractéristiques du support choisi, les seuls nombres que les élèves peuvent placer avec précision sont les nombres décimaux pouvant s'écrire avec un chiffre après la virgule. Nous souhaitons disqualifier le travail avec les valeurs approchées et favoriser l'analyse des relations entre nombres liés par les opérateurs "carré" et "racine carrée". Aussi l'usage de la calculatrice est supprimé dans cette situation.

Le travail se déroule en groupe avec un jeu de message où les élèves sont conjointement en position d'émetteur et de récepteur. Chaque groupe doit se mettre d'accord sur la représentation des nouveaux nombres sur l'axe des abscisses et leur comparaison. Cette situation doit conduire les élèves à expliciter leurs procédures et les réponses au problème. Le fait de devoir être lus et compris par un autre groupe, va amener les élèves à mieux préciser les écrits qu'ils vont produire.

Il s'agit d'une situation de communication [G. BROUSSEAU, 1986] où les élèves vont critiquer un message écrit et le renvoyer avec les critiques. Le milieu pour un élève en position "émetteur" est constitué par le matériel, les consignes, les partenaires du groupe, et les retours du groupe récepteur.

- **Les consignes**

> Vous travaillez en groupe.
>
> 1) Placez sur l'axe des x les nombres $\sqrt{3+\sqrt{13}}$ et $\sqrt{\sqrt{7}+3{,}6}$.
>
> 2) Vous devez écrire un message indiquant comment on représente les deux nombres $\sqrt{3+\sqrt{13}}$ et $\sqrt{\sqrt{7}+3{,}6}$.
>
> Vous recevrez ensuite un message venant d'un autre groupe et vous devez critiquer le message reçu, puis le renvoyer avec les critiques.
>
> Après le retour des messages, faites éventuellement des corrections sur votre message et votre graphique.
>
> Mettez-vous d'accord sur ce que devra dire le représentant du groupe.
>
> Ce représentant sera choisi par le professeur quand on fera le bilan.
>
> 3) Rangez dans l'ordre croissant les nombres $\sqrt{3+\sqrt{13}}$ et $\sqrt{\sqrt{7}+3{,}6}$.

Le groupe doit se mettre d'accord sur la représentation des nombres sur l'axe des abscisses et leur comparaison. La tâche des élèves est d'expliciter par écrit leurs procédures et les réponses au problème.

末代皇帝的后半生

末代皇帝的后半生

末代皇帝的后半生

4.2. Les messages

Nous analysons les messages du groupe émetteur et la réponse du groupe récepteur à la fin de la situation de deux point de vue :

- l'utilisation ou le contournement d'une problématique graphique qui donne un premier classement des messages ;

- le statut et le traitement des racines carrées par rapport aux autres nombres étudiés dans chaque message.

4.2.1. Premier type : procédures sans valeur approchée

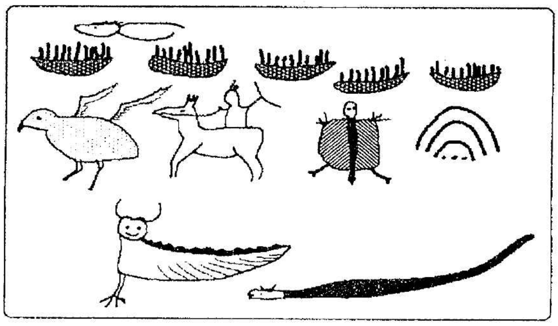
Il s'agit des groupes qui sont entrés dans la problématique graphique. Les constructions s'obtiennent par report au compas et les racines carrées de décimaux sont construites avec la courbe par des tracés le long des axes.

• **Le groupe 4** : L'écrit du groupe 4 est exemplaire pour sa précision et sa concision dans la description des procédures graphiques.

Message du groupe 4

> Pour placer $\sqrt{3+\sqrt{13}}$ et $\sqrt{\sqrt{7}+3{,}6}$ on place 13 sur l'axe des ordonnées. Au point d'intersection de l'horizontale passant par 13 et de la courbe je prends la verticale passant par ce point, elle coupe l'axe des abscisse en un point : c'est la racine carrée de 13. On reporte au compas sur l'axe des ordonnées à laquelle on rajoute 3. On prend la verticale qui passe par le point d'intersection de la courbe et de l'horizontale passant par $3+\sqrt{13}$.
> Cette verticale coupe les abscisses en un point : $\sqrt{3+\sqrt{13}}$.

Les élèves considèrent de la même manière un entier comme 13 et des nombres comme $3+\sqrt{13}$ ou $\sqrt{3+\sqrt{13}}$ à grande complexité ostensive. Les différentes expressions numériques prennent un statut uniforme de nombres à travers l'aspect nombre-repère.



• **Le groupe 6** donne un message nettement moins concis que le précédent.

Message du groupe 6

> Tout d'abord, nous devons trouver $\sqrt{13}$; pour cela :
> - Nous prenons 13 sur l'axe des ordonnées, nous traçons une droite passant par 13 ; parallèle aux abscisses.
> - Nous traçons une perpendiculaire à cette droite passant par le point de rencontre entre cette droite et la courbe du côté positif. Elle coupe l'axe des abscisses en racine carrée de 13.
> - Nous prenons $\sqrt{13}$ au compas et le reportons sur l'axe des ordonnées. Nous rajoutons 3 et nous arrivons sur $3+\sqrt{13}$.
> - Nous traçons une droite passant par ce point, sa perpendiculaire la coupe en son point de rencontre avec la courbe. Là où cette dernière droite coupe l'axe des abscisses se trouve le point : $\sqrt{3+\sqrt{13}}$.

Ici encore les nombres 13, $\sqrt{13}$, $3+\sqrt{13}$ et $\sqrt{3+\sqrt{13}}$ apparaissent tous comme nombres-repères : *"Nous prenons 13 sur l'axe"* et *"le point :* $\sqrt{3+\sqrt{13}}$ ".

• **Le groupe 5** reste dans une procédure graphique (rappel de l'utilisation du compas).

Message du groupe 5

> 1) On a pris la valeur de $\sqrt{13}$ sur le graphique (au compas), on y a ajouté 3 (au compas)
>
> 2) On a reporté cette mesure sur l'axe des ordonnées. Ensuite, on a pris la valeur de la racine carrée de cette mesure que l'on a reportée sur l'axe des abscisses et l'on a trouvé le point $\sqrt{3+\sqrt{13}}$.

• **Le groupe 3** donne un message qui semble relever aussi d'une problématique graphique, mais qui présente des implicites sur l'addition des nombres et le report sur l'axe des ordonnées.

Message du groupe 3

> On prend $\sqrt{13}$, on ajoute le nombre obtenu à 3, et l'on prend la racine carrée du nombre global obtenu.
>
> Pour prendre la racine carrée d'un nombre dont la racine carrée n'est pas évidente (4, 9, 25, ...), l'on trace la perpendiculaire à l'axe des ordonnées au niveau du carré. Cette perpendiculaire coupe la courbe en un point qui, en traçant la parallèle à l'axe des ordonnées, coupe l'axe des abscisses en la racine carrée du nombre de départ.

Le nombre $3+\sqrt{13}$ semble prendre un statut de nombre : *"le nombre global obtenu"* ou encore *"un nombre dont la racine carrée n'est pas évidente"*.

Les groupes récepteurs de ces messages ne les remettront pas en cause et indiqueront qu'ils ont donné le même procédé.

4.2.2. Deuxième type de messages : l'intrusion de valeurs approchées

• **Le groupe 1** utilise bien la courbe pour représenter des racines carrées, mais pour les reports sur les axes, les élèves prennent des valeurs approchées lues sur le graphique, qui semblent assimilées aux racines carrées. Le groupe récepteur va d'ailleurs bien relever la rupture du contrat sur la problématique graphique et les ruptures du contrat de calcul.

Message du groupe 1

> D'après le graphique $\sqrt{13}$ est compris entre 3,6 et 3,7. Si d'après le calcul on ajoute 3, on sait que le résultat du calcul est compris entre 6,6 et 6,7.

Réponse du groupe récepteur

> La valeur que vous avez donnée correspond à $3+\sqrt{13}$, et on vous a demandé de placer $\sqrt{3+\sqrt{13}}$. Vous avez trouvé la valeur de x^2 et non de x.
>
> Cherchez encore !!! Essayer de travailler sans la valeur décimale de $\sqrt{13}$ et de $\sqrt{7}$.

• **Le groupe 2** semble se placer dans une problématique graphique, mais on assiste à l'apparition dans le message de valeurs approchées, ce qui en rend difficile l'interprétation. L'ambiguïté du message conduit le groupe récepteur[4] à critiquer la démarche. Ces valeurs ne sont pas utilisées pour représenter les nombres, mais, peut être, pour donner un ordre de grandeur du nombre.

Message du groupe 2

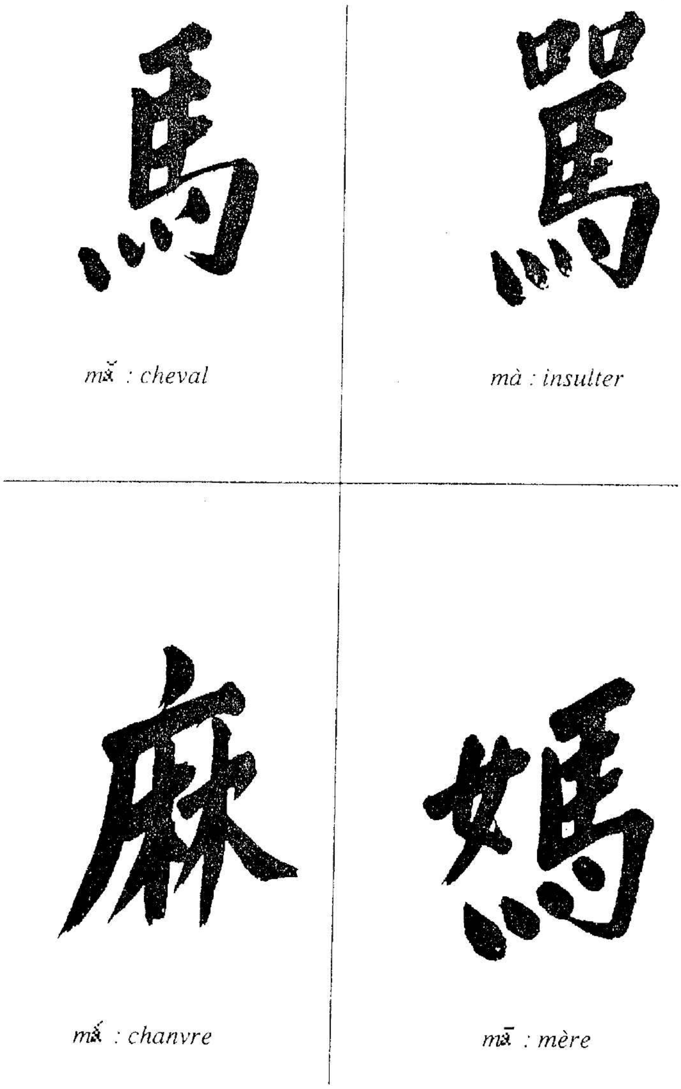
> Pour trouver la racine carrée de 13 on place le crayon sur le point 13 de l'ordonnée, on cherche donc sa racine carrée sur l'abscisse, ce qui donne $\approx 3{,}6$. Puis on ajoute 3. Avec le compas on prend le même écart qu'il y a sur l'abscisse de 0 à $\approx 3{,}6$ et on le reporte sur l'ordonnée. Réciproquement, grâce à la courbe, on trouve sur l'abscisse le nombre $\approx \sqrt{3+\sqrt{13}}$.

[4] L'oubli de l'ajout de 3 à $\sqrt{13}$ dans le report au compas n'est pas relevé par ce groupe récepteur.

Réponse du groupe récepteur

Le début est correct. Vous avez calculé une donnée juste dont vous ne vous êtes pas resservi plus tard.

Les expressions complexes avec radicaux ne semblent pas prendre chez ces élèves un statut de nombre comme pour les décimaux. Les élèves ne désignent pas des nombres directement avec ces expressions et s'imposent de passer par le symbole ≈.



Quatre graphies pour une même syllabe

4.3. Analyse a posteriori et bilan de la situation 2

L'action du milieu dans la situation précédente a conduit les groupes à rectifier les messages et les constructions dans l'esprit de celui du groupe 4. Cette situation se conclut par le rangement de tous les nombres placés sur l'axe des abscisses, montrant encore une utilisation numérique du registre graphique.

La plupart des élèves se sont placés dans une problématique graphique ; certains élèves y sont entrés au cours ou en fin de situation. Ce travail visait la mise en place d'une représentation uniforme des nombres et de leur traitement, ainsi que, le statut de nombre de certains nombres dont l'écriture présente une grande complexité ostensive.

Au départ, les nombres ont été manipulés par les élèves selon leurs écritures (décimale ou fractionnaire, avec radicaux simples ou radicaux emboîtés). Ensuite, les élèves ont abouti à un système unique de représentation des différents types de nombres, *des nombres repères*. Une unification par rapport à la représentation et au traitement des nombres s'est opérée.

La tâche de production des messages a conduit tous les groupes à analyser la structure algébrique de $\sqrt{3+\sqrt{13}}$. L'explicitation par écrit de la procédure graphique a favorisé cette analyse et a montré un traitement uniforme des différents nombres intervenant dans cette structure : considérer $\sqrt{13}$ à l'instar d'un entier comme 3, envisager leur somme, et prendre la racine carrée $3+\sqrt{13}$. Des questions se sont posées à ce propos dans le travail de groupe. La situation a amené au niveau des rapports personnels des élèves au Numérique un enrichissement de l'espace numérique. Des nombres comme $\sqrt{13}$, $3+\sqrt{13}$, $\sqrt{3+\sqrt{13}}$ font désormais partie de l'espace de travail de l'élève de cette classe.

Lors des travaux de groupe, les élèves ont fait des manipulations en s'aidant de la courbe comme moyen pour passer d'un nombre à son carré ou d'un nombre à sa racine carrée et les échanges oraux ont été nombreux et animés. Nous avons constaté que c'est le passage à l'écriture du message à envoyer qui a permis aux élèves de chaque groupe, de comprendre les différentes propositions de chacun et d'avancer vers une compréhension commune. La production d'un message écrit les a obligés à entrer dans un travail beaucoup plus approfondi sur la structure des nombres. L'explication par l'écrit semble avoir permis de dépasser le stade procédural et de construire des connaissances locales.

Concernant la critique écrite des messages, le professeur avait précisé oralement qu'il voulait une critique "intelligente" montrant les erreurs ou indiquant une piste mais ne donnant pas les réponses, de façon à permettre à l'autre groupe de rebondir dans sa réflexion. On peut constater que les critiques sont, pratiquement, toutes écrites ainsi et que ces écrits ont permis un retour constructif des groupes émetteurs sur leurs messages.

Les échanges écrits de message ont ainsi permis l'installation d'un savoir commun à tous les élèves de tous les groupes, sans même avoir besoin de l'intervention de l'enseignant ou d'un bilan classe entière.

II - L'écrit dans le Géométrique : réactiver les connaissances et négocier un contrat didactique

Le démarrage de l'année est toujours une situation délicate autant au niveau relationnel qu'au niveau du type de fonctionnement en classe. Plutôt que de commencer par des révisions systématiques pour pallier à l'érosion des grandes vacances, nous avons expérimenté un autre type de *démarrage* en géométrie dans une classe de Troisième, où l'écrit prendra des rôles spécifiques.

1. Les objectifs de la situation

Notre intention est de démarrer l'année en prenant en compte dès le début les objectifs suivants :

- connaître les acquis et difficultés des élèves sur certains domaines de connaissances et commencer des remédiations ;
- repérer leur rapport à la démonstration et engager un apprentissage en Troisième;
- mettre en place un certain contrat pédagogique et didactique dans la classe.

Nous avons été amenés à proposer une situation ayant les conditions suivantes :

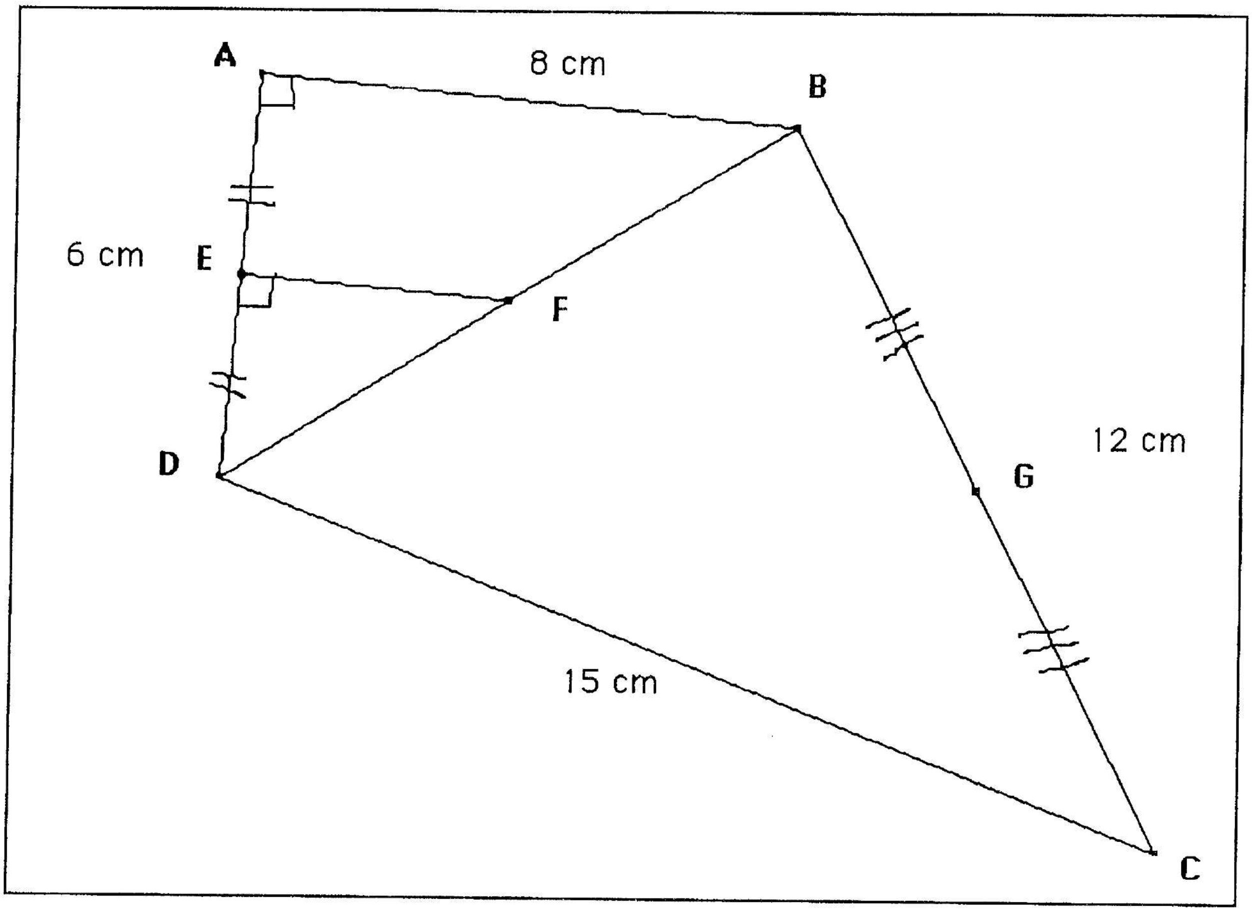
- La situation s'appuie sur un *énoncé-problématique* [A. BRONNER & S. PELLEQUER, 1995] : nous entendons ainsi un énoncé où figurent des données géométriques et/ou numériques sans question précisée. Cet énoncé doit permettre de faire émerger de nombreuses questions par les élèves eux-mêmes. Les questions doivent mettre en jeu de nombreux concepts mathématiques et pouvoir être traitées avec les connaissances visées dans les apprentissages précédents.
- L'opérationnalisation d'un tel énoncé en classe doit conduire à la mise en place d'un milieu [BROUSSEAU, 1986] avec lequel l'élève va interagir dans des situations de communication et de validation. Plus précisément, les élèves seront amenés successivement :
  - à émettre des questions à partir de l'énoncé ;
  - à proposer à d'autres élèves une question, à préciser les théorèmes qui permettent son traitement, et les informations utiles de l'énoncé ;
  - à analyser et critiquer la résolution du groupe récepteur, à comparer avec leur propre démarche de résolution.

Nous faisons l'**hypothèse** que dans une telle situation :

- on peut favoriser un riche questionnement et des activités de résolution de problèmes, sans nécessairement prendre des problèmes complexes et mettre en jeu de nouvelles connaissances ;
- on peut apprécier le degré de capitalisation de connaissances, méthodes et situations sur un domaine déjà étudié par les élèves ;
- les élèves peuvent mieux prendre en compte les attentes de l'enseignant sur l'activité mathématique et le fonctionnement de la classe mathématique ;
- l'enseignant peut plus facilement connaître ses élèves et favoriser un début de mise en place d'un contrat didactique en classe.

2. L'écrit problématique

L'énoncé problématique est en fait ici la figure suivante :



Le choix de cette figure est d'abord justifié par le fait que nous voulions une situation qui permette de mobiliser les connaissances des classes antérieures sur les triangles (et les triangles rectangles en particulier), le théorème de Pythagore et sa réciproque, les divers théorèmes des milieux dans un triangle, le théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle, le cosinus d'un angle, la notion de racine carrée.

Elle est très riche quant aux nombres de questions possibles et de théorèmes à utiliser. De plus, il peut y avoir des questions "très simples", même pour des élèves en difficulté. Elle peut aussi permettre un questionnement sur les notions de "valeur exacte" et "valeur approchée" d'un nombre.

Nous n'avons pas présenté aux élèves cette activité sous la forme classique d'un énoncé mathématique (données, question) ; les élèves vont, en fait, être confrontés à un énoncé (ici une figure) sans question.

L'expérimentation a eu lieu en tout début d'année. La classe est constituée de 26 élèves qui seront partagés en 4 groupes de 4 élèves et 2 groupes de 5 élèves. Lors de cette première situation les groupes se font par regroupement géographique, dans la classe, puisque le professeur ne connaît pas encore ses élèves.

Une première étape a permis l'émergence de questions et le repérage d'éléments sur le raisonnement déductif. Dans une deuxième étape, les élèves ont traité par écrit des questions issues de l'énoncé, par l'intermédiaire de phases de communication et de validation entre les groupes d'élèves. Une dernière étape a été consacrée à un travail de rédaction en géométrie.

3. Analyse de la situation

PREMIERE SEANCE

Phase 1 : (20 minutes environ)

Consigne :

"Ecris toutes les informations que la figure te donne et dont tu es sûr."

Déroulement :

La figure est distribuée à chaque élève de la classe.

Dans un premier temps, le travail est individuel et dure environ 10 minutes.

Dans un deuxième temps, le professeur organise un bilan.

Au tableau, le professeur écrit la liste de toutes les informations prises sur la figure par la classe. Chaque proposition va être discutée. Le professeur anime un débat avec la classe entière sur l'acceptation ou le rejet de certaines informations. Il ne tranche qu'en dernier recours.

Nous donnons en annexe 4, les informations proposées par l'élève Bès.

Les différents écrits des élèves ont permis, dans un premier temps, de constater qu'un même codage peut amener plusieurs lectures différentes. Ainsi le codage de l'angle $\hat{A}$ peut se lire :

$$D\hat{A}B = 90°$$

$$(AD) \perp (AB)$$

le triangle ADB est rectangle de A.

Ces différentes lectures sont souvent essentielles pour la recherche d'un problème.

Dans un deuxième temps, la discussion a porté sur les questions :

- Peut-on considérer BDC comme un triangle rectangle ou bien F milieu de [DB] ?
- Peut-on écrire directement que E milieu de [AD] ou que les droites (AB) et (EF) sont parallèles ?

Certains écrits d'élèves ont permis de constater que ceux-ci ont tendance à tenir pour vrai des propriétés lues sur la figure, comme celle de la première question. Il est essentiel de faire pleinement jouer à l'écrit « cahier de brouillon » un rôle d'écrit privé pour permettre aux élèves d'exprimer facilement leur lecture du vrai d'un énoncé. Le fait de parler de ce type de questions dès le début de l'année permet de clarifier les exigences et attentes du professeur, et de préciser le contrat dans la classe de mathématique.

À la fin du bilan, chaque élève de la classe peut aborder la phase suivante en disposant des mêmes informations que tous ses camarades, ce qui permet une certaine régulation au niveau des élèves. Cette phase permet de mettre en place le milieu de la situation avec lequel l'élève va être confronté.

Phase 2 : (40 minutes)

Consignes :

a) Imagine une question que tu pourrais poser à un autre groupe.

b) Ecris à l'aide de quel(s) théorème(s) on peut y répondre.

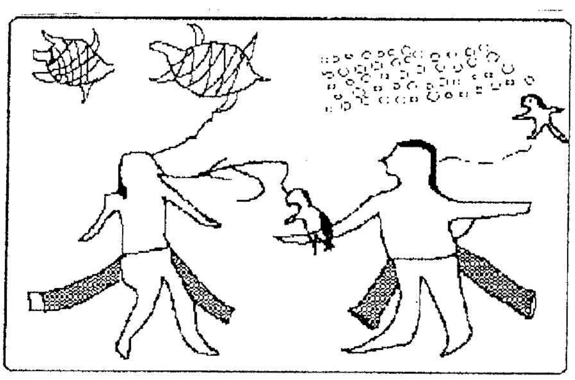
c) Ecris les informations utiles de la figure pour cette question.

d) Cherche le plus de questions possibles.

Déroulement :

La recherche se fait maintenant par groupe. Le rôle du professeur dans cette phase est de faire respecter les consignes et le contrat du travail en groupe qui doit se mettre en place dans la classe. La tâche du groupe est de trouver et traiter le plus de questions possibles liées à cette figure. Pour préparer la phase suivante le professeur va donner son accord sur une question à poser à un autre groupe.

Ici, les élèves sont dans des positions non habituelles. C'est à eux de formuler les questions et de mettre en relation « données » et « questions » La production de cet écrit va objectiver le regard des élèves sur les questions et non plus les subir en spectateur. Sans résoudre les questions, ils vont aussi écrire les théorèmes permettant de résoudre, selon eux, les questions. L'écrit va permettre aussi réactiver les théorèmes et de voir la forme qu'ils prennent en début d'année.



DEUXIEME SEANCE

Phase 3 : (30 minutes)

Cette phase se déroule toujours en groupe et va comporter trois étapes.

Consignes :

Résoudre la question reçue et rédiger le plus soigneusement possible la solution choisie par le groupe. Cette solution sera envoyée au groupe qui a émis la question (premier temps).

Reprendre la question envoyée et la réponse de l'autre groupe. "Corriger" l'autre groupe avec les critères suivants :

- Est-ce juste ou faux ?
- La rédaction est-elle correcte ?
- La démarche est-elle identique ? Sinon expliquer la vôtre.

Déroulement :

Premier temps : La tâche de chaque groupe est de résoudre et de rédiger une solution au problème correspondant à la question posée par un autre groupe.

Deuxième temps : Ensuite le groupe émetteur reçoit la solution d'un autre groupe à sa question et la confronte à sa propre solution selon les consignes données par le professeur. Dans cette phase, le professeur donne les nouvelles consignes et explique le fonctionnement de la classe qui n'est peut être pas habituel pour les élèves. Il transmet les questions, puis les solutions dans le deuxième temps de la phase.

Il s'assure de la compréhension des consignes et garde la vigilance sur le fonctionnement et le contrat de travail en groupe.

Troisième temps (assez bref) : On effectue un dernier échange et chaque groupe reprend sa solution à la question posée corrigée par le groupe émetteur. Ce groupe peut ainsi réagir à la correction et voir éventuellement une autre démarche.

Dans cette phase, la régulation entre les groupes reste facilitée car le professeur peut proposer aux groupes les plus rapides de rédiger une autre question.

Chaque groupe reste responsable de son travail. Les diverses communications entre les groupes permettent, à des degrés différents, une certaine rétroaction du travail de chacun, sans le besoin indispensable de validation par le professeur dans cette phase.

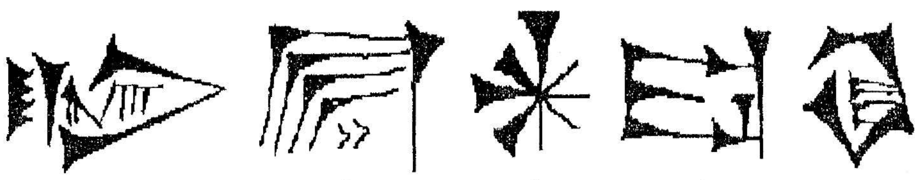
Phase 4 : (30 minutes)

Déroulement :

Le professeur reprend au tableau avec la classe entière les deux questions retenues. C'est la classe entière maintenant qui va faire le point sur ce qu'on attend comme solution aux deux questions. Le professeur reprend en fin de séance la responsabilité de façon à expliciter ses premières exigences et attentes sur la démonstration et sur les connaissances mathématiques en jeu dans la situation.

Les théorèmes sont décontextualisés de la situation et écrits dans le cahier de cours.

Cette phase est centrée sur la validation des raisonnements, des solutions et de certaines écritures mathématiques. Elle est délicate à gérer dans la mesure où le professeur essaie de rester au maximum en retrait par rapport à l'évaluation des propositions des élèves. En général la classe (les élèves) a pu argumenter correctement et se mettre d'accord sur la démonstration des questions. A partir d'un certain moment, le professeur a fait usage de sa responsabilité pour faire le point sur le raisonnement déductif et pour trancher sur certains résultats, notamment pour les réponses attendues sur le cosinus et soulever le problème des valeurs approchées. Cette dernière question sera retravaillée tout le long de l'année.



1 2 3 4

4. Analyse des résultats des élèves

Les questions suivantes ont été proposées par les élèves :

- Calculer la longueur des segments [AF], [EF], et des côtés du triangle BFG ?
- Calculer le périmètre du triangle BFG ?
- Les droites (FG) et (CD) sont-elles parallèles ?
- Calculer l'angle $\widehat{ABD}$?
- Calculer l'angle $\widehat{ADB}$?
- F est-il le centre du cercle circonscrit à ABD ?
- Quelle est la nature du triangle BCD ?

Nous donnons quelques écrits d'élèves en annexe 5.

4.1. Le calcul de AF (4 élèves, Chal, Pers, Bois, Mat)

La méthode choisie repose bien sur le fait que [AF] est un rayon du cercle circonscrit au triangle rectangle ADB et sur le calcul du diamètre DB. Les quatre élèves ont indiqué que le triangle rectangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'hypoténuse.

Au niveau du raisonnement des implicites apparaissent :

- Un élève (Cha) considère directement que F est le milieu de [BD] ou que [AF] est une médiane.
- Tous les élèves considèrent que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Au niveau de la rédaction de la démonstration, les écrits des élèves soulèvent les difficultés suivantes :

- L'absence du théorème utilisé :
  - le théorème sur le cercle circonscrit à un triangle rectangle (Mat, Chal, Pers),
  - le théorème de Pythagore (Bois, Mat),
  - un théorème des milieux (Mat).
- La précision des conditions d'accès au théorème utilisé (explicitement ou implicitement) :
  - pour le calcul de DB, on ne précise pas que le triangle est rectangle (Mat, Bois),
  - pour montrer que F est le milieu de [DB] (Bois).
- L'indication de la question (Chal).

4.2. Le calcul de EF (3 élèves, Ho, Sh, Bes)

Deux méthodes sont repérées où n'apparaissent pas d'erreur de contenu ou de calcul :

- utilisation, uniquement, des théorèmes des milieux dans le triangle et en particulier EF est la moitié de AB (Bes, Ho);
- utilisation des théorèmes des milieux pour montrer que F est le milieu de [BD], et ensuite utilisation du théorème de Pythagore dans les triangles ADB et DEF (Sh).

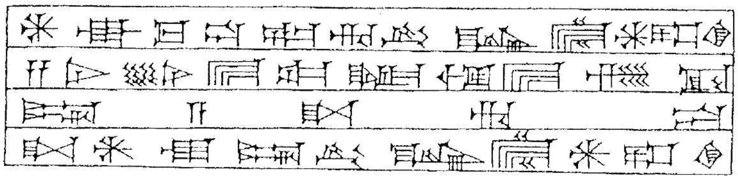
L'élève Sh et les théorèmes : L'utilisation du théorème de Pythagore par Sh est correcte, mais il a des difficultés avec les manipulations symboliques et, en particulier, avec le radical. Signalons qu'il cite le théorème de Thalès au lieu de celui de Pythagore, mais applique bien ce dernier. Pour cet élève le fait que les droites (AB) et (EF) sont parallèles semblent implicites.

Au niveau de la rédaction de la démonstration dans ce groupe, tous les théorèmes sont cités, sauf pour le parallélisme de (AB) et (EF).

En effet, le théorème portant sur "les droites perpendiculaires à une même troisième" n'est pas cité et l'on a droit ici à une rédaction de la démonstration dans un code symbolique :

$$\left.\begin{array}{l}(AB) \perp (AE)\\ \\ (AE) \perp (EF)\end{array}\right\} AB // EF$$

On peut se demander s'il n'y a pas un effet didactique dû aux corrections au tableau. En effet, il peut se présenter un manque de cohérence entre la rédaction demandée et la présentation, au tableau, d'exemple de démonstration ou de correction d'exercices par les professeurs (ou les élèves). Nous voyons ici un impact possible de l'écrit « tableau » et de sa caractéristique « publique » dans l'apprentissage scolaire.



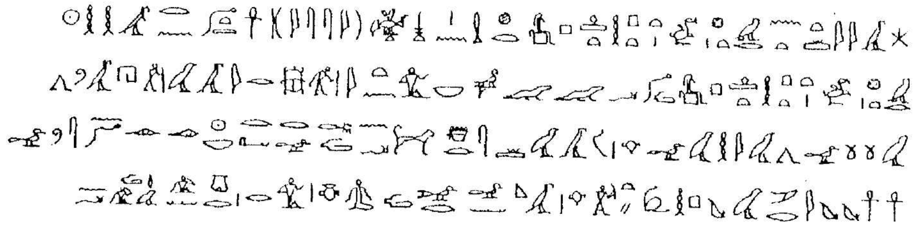
4.3 Le calcul des côtés du triangle BFG (2 élèves, Gras, Fré)

Cette question nécessite de nombreux raisonnements et calculs, analogues à ceux à la fois des questions a) et b).

Pour le calcul de BF, une méthode conduit à montrer que F est le milieu de [BD] et à utiliser le calcul de BD par le théorème de Pythagore. Ensuite, pour [FG] on peut utiliser un théorème de milieux comme pour la question b). Ces méthodes semblent bien comprises pour ces deux élèves, mais l'élève Gras présente une qualité supérieure de rédaction. On ne note pas d'implicite, ni d'imprécision, au niveau des théorèmes ou des conditions d'accès des théorèmes.

Au niveau du symbolisme, il apparaît chez Gras la difficulté à gérer les notations sur les segments, distances, longueurs ; et des formulations du genre BG = 1/2 de BC.

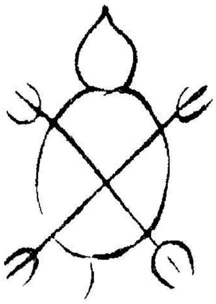
Cet élève a une rédaction très claire et semble bien maîtriser les contenus sous-jacents. Ceci nous interpelle sur les difficultés propres à l'usage des notations et présentes encore en classe de troisième.



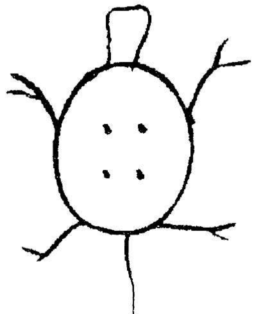
4.4. F est le centre du cercle circonscrit à ABD (3 élèves, Sin, Bel, x)

Deux élèves ont bien vu que l'exercice repose sur la propriété du centre circonscrit à un triangle rectangle et qu'il faut montrer que F est le milieu de [BD]. Par contre, au niveau du raisonnement l'implicite fort du parallélisme des droites (AB) et (EF) apparaît dans les trois copies et aucun ne fait référence à l'orthogonalité de certaines droites.

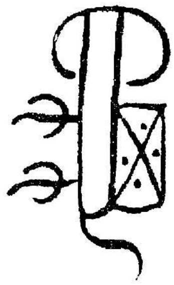
Evolution du caractère "tortue"



·Ecaille : IIème millénaire av. J.-C.



Métal : Ier millénaire av. J.-C.



Tsin : IIème siècle av. J.-C.

tortue (gui kuei), graphie actuelle.

Graphie actuelle simplifiée

4.5. Le calcul des angles $\widehat{ABD}$ (7 élèves, Dez, Iso, Ana, Bar, y, Cas, Tamb) et $\widehat{ADB}$ (ou $\widehat{EDF}$) (3 élèves, All, bra, Gran)

La méthode ne semble pas poser de problème à ces élèves. Ils ont tous bien vu que le calcul nécessiter celui de BD (obtenu sans difficulté par le théorème de Pythagore), celui du cosinus de l'angle considéré. Enfin, ils ont conclu en utilisant la touche appropriée de la machine, sauf pour un élève. La mobilisation du théorème de Pythagore est correcte et les élèves utilisent convenablement le radical pour conclure.

Le calcul du cosinus des angles s'effectue correctement. Les élèves laissent parfois les résultats sous forme fractionnaire, parfois donnent l'écriture décimale, comme :

$$\cos(\widehat{EDF}) = \frac{3}{5} \text{ ou } 0{,}6 .$$

Les élèves utilisent correctement la machine pour avoir l'angle cherché. Un élève (Gra) explicite le procédé *"A l'aide de la machine (inverse cosinus) j'obtiens* $\widehat{EDF}$ *qui est égal à : 53,13°".*

Au niveau des résultats pour l'angle, les formulations et valeurs données présentent une grande diversité et montrent le flou sur ce calcul. En général, les élèves donnent l'égalité entre une valeur décimale et l'angle.

Pour $\widehat{ABD}$ on relève les formulations suivantes :

Elève	Dez	Bar	Y	Tam	Ana	Iso	Cas
Valeur	=36,86°	=36,9°	=36,87	=36,8	=36,86 ≈ 37°	=36,86 = 37°	=36°,9

Et pour $\widehat{EDF}$:

Elève	Gras	Alla	Bra
Valeur	: 53,13°	≈ 53°	≈ 53,3° L'angle $\widehat{EDF}$ fait 53,3°

Beaucoup d'élèves donnent une égalité avec une valeur approchée. Il est difficile de préciser les critères de choix des valeurs approchées, en dehors du fait que les valeurs sont entières, ou décimales et écrites avec une ou deux décimales.

Ces écrits nous amènent au problème du statut de cette égalité ou du signe ≈ dans le cadre de cette recherche d'angle. Cela semble, somme toute, assez normal par rapport au contrat (assez flou) en vigueur en 4ème concernant le calcul d'angle par le cosinus et la calculatrice.

Deux réponses attirent notre attention :

$$(\text{Iso})\ \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{DB}} = \frac{8}{10} = \mathbf{cos}(\widehat{\mathbf{ABD}}) = 36{,}86$$

$$(\text{Tam})\ \widehat{\mathbf{ABD}} = \mathbf{cos}\ \frac{8}{10} = \mathbf{cos}\ 0{,}8 = 36{,}8 = 36{,}86$$

Ces réponses montrent bien la difficulté pour ces élèves de gérer les écritures entre le cosinus et la fonction réciproque (ou plutôt une procédure réciproque) pour obtenir l'angle.


刊

植根民族土壤的新蕊

——文化部直屬院團舞蹈專場

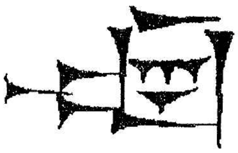
陳湘

4.6. Bilan sur les écrits des élèves dans cette première situation en géométrie

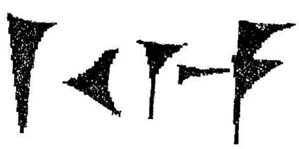
Après cette première activité de début d'année des séquences spécifiques sur le théorème de Thalès, la trigonométrie et le calcul littéral ont été abordées. Elles ont pris appui sur ce premier travail de l'année. Elles en constituent un prolongement et un approfondissement au niveau des contenus et du raisonnement. Les résultats des élèves, trois mois après cette activité, et le contrat ainsi établi nous confortent dans notre hypothèse de l'impact de ce type d'activité où l'écrit a pris une importance toute particulière en tout début d'année.

D'une part, grâce à leurs écrits, cette activité nous a donné, dès les premières séances, beaucoup d'informations sur les élèves eux-mêmes, leurs acquis et leurs difficultés. Un travail de fond a été effectué sur le raisonnement déductif et, parallèlement, tous les théorèmes important de Quatrième ont été réactivés.

D'autre part, cette activité, par sa présentation et son fonctionnement, rompt le "contrat habituel" de la classe pour interpeller les élèves et les faire réagir dans le sens souhaité. La première rupture vient du type même de tâche qui est proposée aux élèves, énoncer des questions, résoudre les problèmes créés, corriger les réponses données à ce problème, et non résoudre directement des exercices ou faire des calculs comme dans le "contrat habituel". La deuxième rupture vient que toutes les connaissances réactivées et le contact didactique instauré dans la classe se fondent sur les écrits produits par les élèves de la classe.



manger (bouche + pain)



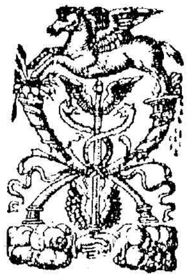
pleurer (oeil + eau)

CONCLUSION

Tout au long de ce travail, nous avons essayé de montrer la place et le rôle des écrits dans l'enseignement et dans l'apprentissage des mathématiques. Nous faisons l'hypothèse que les écrits personnels des élèves, pour jouer leurs rôles, doivent être différents des écrits officiels attendus. Pour cela, il faut rompre le contrat habituel de la classe et amener les élèves à produire d'autres écrits, soit en les sollicitant par des questions très différentes, soit en les plaçant en situation de communication (émetteur / récepteur), soit en les faisant travailler en groupe, soit tout autre moyen permettant de sortir d'une rédaction type d'un problème mathématique. Alors qu'une rédaction à un problème mathématique demande en général à être dépersonnalisée et séparée de toute heuristique, certains écrits doivent utilement permettre d'avoir accès à la représentation que l'élève se fait d'un problème, ou au rapport personnel de l'élève à une notion, ou encore à l'heuristique mise en œuvre.

De plus, tous ces écrits, porteurs de connaissances, ne vont pouvoir être des "déclencheurs" d'apprentissage que si leur forme (phrases, tableau, ...), leurs places et leurs rôles sont choisis en fonction de l'activité mathématique. Autrement dit, les écrits ont une fonction didactique qui doit être pensée comme objet de l'activité mathématique et de l'apprentissage des mathématiques.

Le trętté de la GRAMMĘRE FRANÇOĘZE, fęt par Louis Meigręt Lionoęs.



A PARIS,
Chés Chrestien Wechel, à la rue sainct
Iean de Beauuais, à l'enseigne
du Cheual volant.
M.D.L.

Bibliographie

BRONNER A. & PELLEQUER S., 1995/96, *"Pour démarrer en géométrie et en classe de 3ème : une situation problématique"*. Petit x n° 40, IREM de Grenoble, pp. 65-85.

BRONNER A., 1997, *"Etude didactique des nombres réels : idécimalité et racine carrée"*. Thèse Université J. Fourier, Grenoble.

BROUSSEAU G., 1986, *"Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques "*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Volume 7/2, La pensée sauvage, pp. 35-115.

BROUSSEAU G., 1990, *"Le contrat didactique : le milieu"*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Volume 9/3, La pensée sauvage, Grenoble, pp. 309-336.

CHEVALLARD Y., 1988-89, *"Le concept de rapport au savoir"*. Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique, Université J.Fourier, Grenoble, pp. 211-236.

COPPÉ S., 1995, *"Types de connaissances mises en œuvre par l'élève dans la détermination de la composante publique de son travail"* in Arsac et al "Différents types de savoirs et leur articulation". La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 129-144.

DOUADY R., 1984, *"Jeux de cadres et Dialectique outil-objet"*. Thèse d'état, Université Paris VII.

DUVAL R., 1993, *"Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée"*. Annales de didactique et de sciences cognitives, Volume 5, ULP, IREM de Strasbourg, pp. 37-65.

Illustrations extraites de :

[CHIGNIER et al, 1990] Les systèmes d'écriture, M.E.N., C.N.D.P.

ANNEXES

Annexe 1

Voici les réponses de 4 élèves de la classe :

REPONSE DE SONIA :

x	2	1,2	11	4	1,7	7	-2	
x^2	4	1,44	121	16	2,89	49	4	13

x		$\frac{2}{3}$			4,51				
x^2	-9	$\frac{4}{9}$	-7	$\frac{16}{25}$	20,3401	0,9	$\frac{9}{5}$	2,8	$-\frac{35}{49}$

Indiquer pourquoi vous ne pouvez pas remplir certaines cases :

Je ne peux pas faire $x^2 = -9$ car le carré d'un nombre est toujours positif. (Je ne peux donc pas faire $x^2 = -7 ; -\frac{35}{49}$)

Je ne sais pas passer de x^2 à x.

REPONSE DE XAVIER :

x	1 2	2 1,2	3 11	4 4	5 1,7	6 7	7 -2	8 non
x^2	4	1,44	121	16	2,89	49	4	13

x	1 non	2 $\frac{2}{3}$	3 non	4 $\frac{4}{5}$	5 4,51	6	7 non	8	9 non
x^2	-9	$\frac{4}{9}$	-7	$\frac{16}{25}$	20,3401	0,9	$\frac{9}{5}$	2,8	$-\frac{35}{49}$

Indiquer pourquoi vous ne pouvez pas remplir certaines cases :

1e tableau : 13 n'est pas un carré

2e tableau = Pour les cases 1,3,9, un carré n'est jamais négatif.

7ème cases n'est pas un carré

0,9 ~~et~~ et 2,8 ne sont pas des carrés.

Annexe 1 (suite)

REPONSE DE ROMAIN :

x	2	1,2	11	4	1,7	7	-2	3,60
x^2	4	1,44	121	16	2,89	49	4	13

x	×	$\frac{2}{3}$	×	$\frac{4}{5}$	4,51	0,94	1,34	1,67	×
x^2	-9	$\frac{4}{9}$	-7	$\frac{16}{25}$	20,34	0,9	$\frac{9}{5}$	2,8	$-\frac{35}{49}$

ndiquer pourquoi vous ne pouvez pas remplir certaines cases :
car c'est que des nombres négatifs.
et on ne peux pas trouver avec un nombre
+ ou – un résultat –.

REPONSE DE FABRICE :

x	2	1,2	11	4	1,7	7	-2	3,605
x^2	4	1,44	121	16	2,89	49	4	13

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	×	$\frac{2}{3}$	×	0,8	4,51	0,9486833	1,3416	1,6733	×
x^2	-9	0,4	-7	$\frac{16}{25}$	20,3401	0,9	$\frac{9}{5}$	2,8	$-\frac{35}{49}$

Indiquer pourquoi vous ne pouvez pas remplir certaines cases :
1-3 - 9 sont impossible car le carré d'un nombre est toujours
[illegible]itif

Annexe 2

Synthèse écrite

"RACINES CARREES"

I - Définition

a <u>étant un nombre positif</u>, on appelle <u>racine carrée de a</u> et on note $\sqrt{a}$, le nombre positif qui a pour carré a :

$$\overbrace{\sqrt{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{positif}}}{a}}}^{\text{positif}}$$

Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle un <u>radical</u>.

<u>Exemple</u> : $\sqrt{17}$ a pour carré 17 et on a $(\sqrt{17})^2 = 17$

$$\sqrt{17} \overset{\text{a pour carré}}{\rightleftarrows} 17$$

- Un carré est un nombre toujours positif.
- Un nombre négatif n'est jamais le carré d'un nombre.
- La racine carrée d'un nombre est toujours un nombre positif.

Remarque : La racine carrée d'un nombre peut être :

- un nombre entier $\sqrt{36} = 6$
- un nombre décimal $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$
- une fraction $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7}$

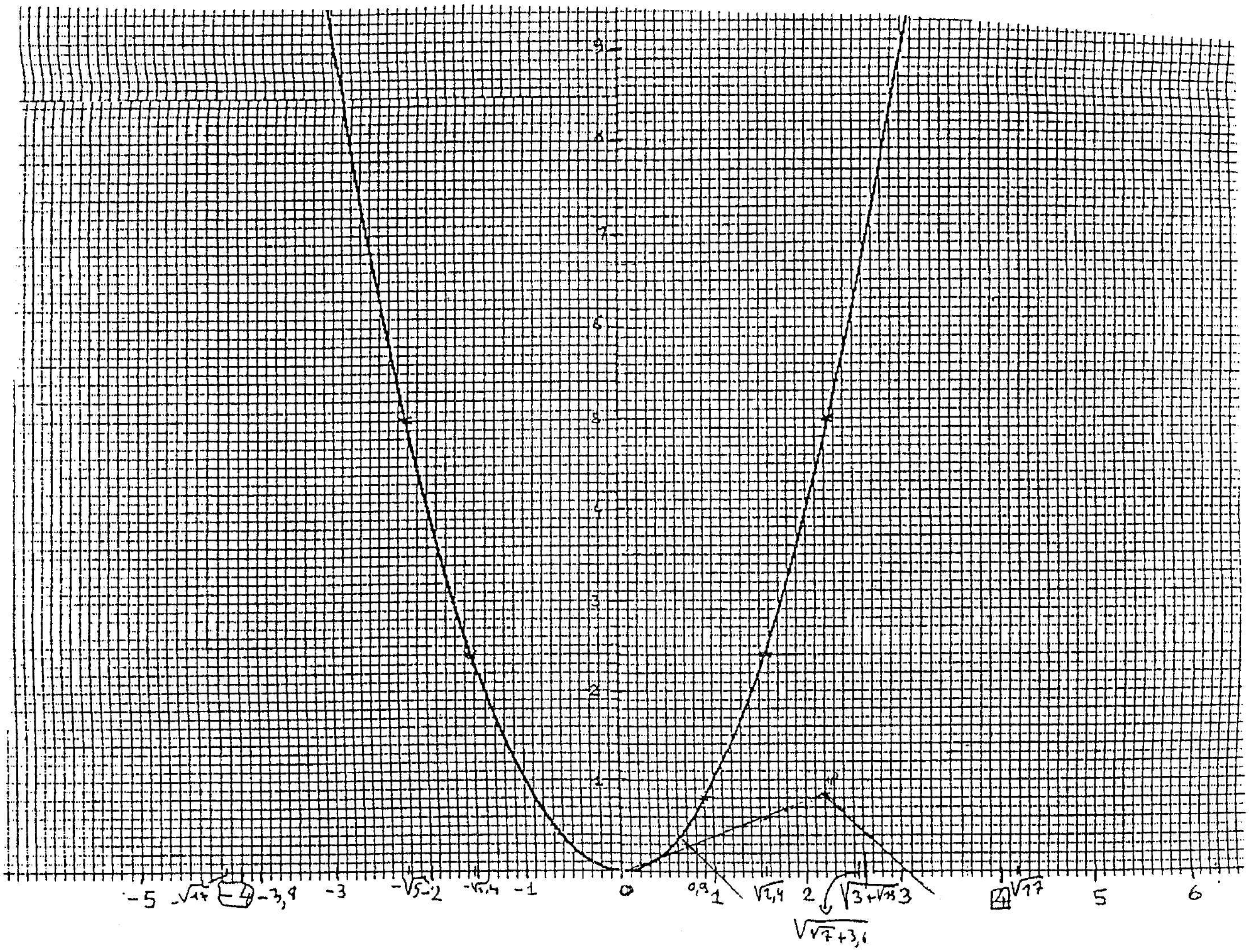
. ou un nombre qui n'est, ni un entier, ni un décimal, ni une fraction ; sa seule écriture exacte est celle utilisant le radical :

* par exemple, en mathématique $\sqrt{17}$ désigne la valeur exacte du nombre positif qui a pour carré 17 ;
* dans certains problèmes, il peut être commode d'utiliser une valeur approchée obtenue à la calculatrice $\sqrt{17} \approx 4{,}1$ au dixième près.

Annexe 3

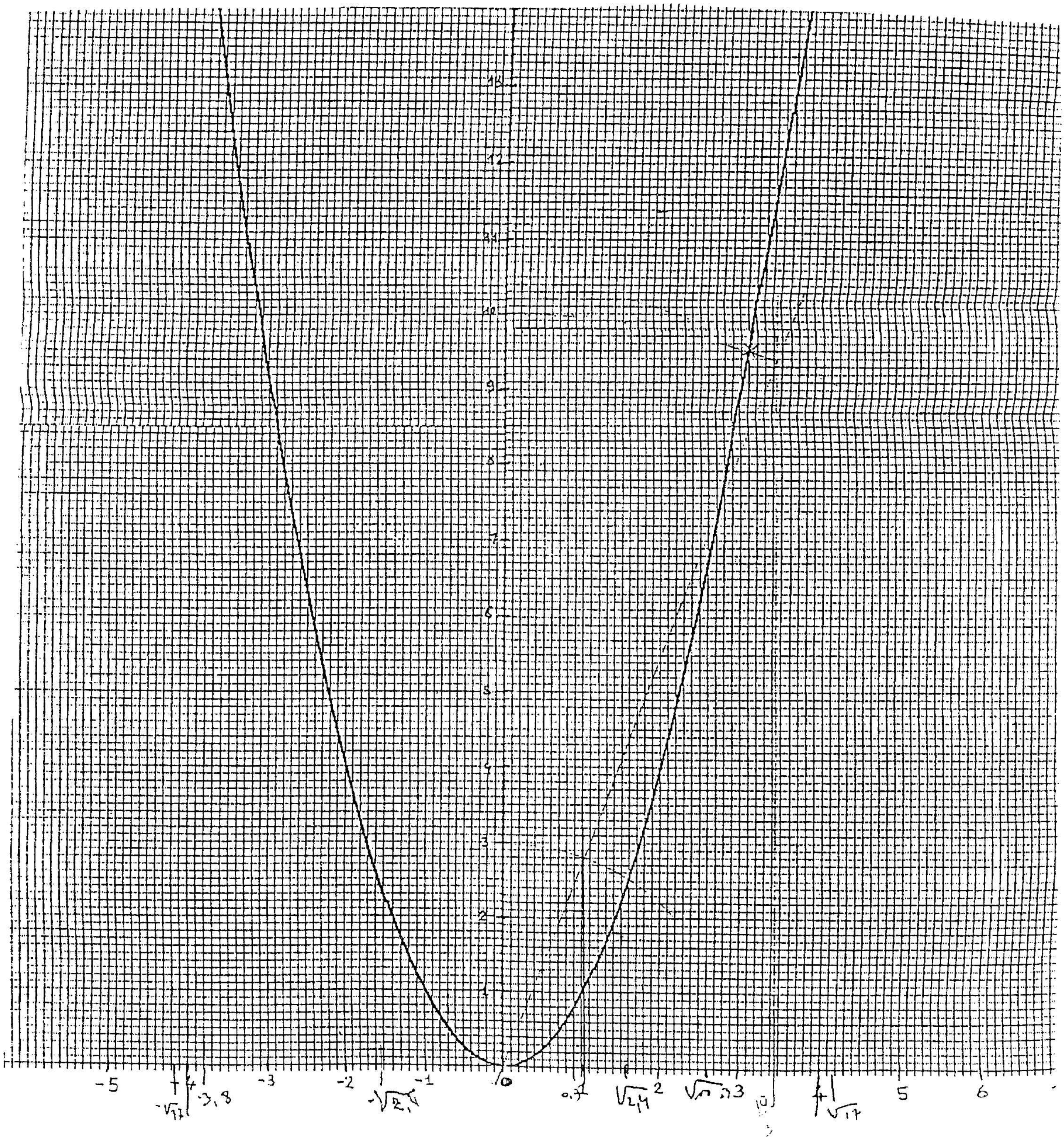
Voici deux exemples de courbes :

<u>Exemple 1</u> :



Annexe 3 (suite)

Exemple 2 :



Annexe 4

Les informations données par l'élève Bes à la phase 1 :

Observation d'une figuré :

Le triangle DEF est rectangle en E

[AE] = [ED] = 3cm

[BG] = [GC] = 6 cm

[AD] = 6cm

[BC] = 12cm

E milieu de [AD]

G milieu de [BC]

[BD] est l'hypothénuse de ADB

DAB est un triangle rectangle en A

(EF) médiatrice de [AD]

(DG) médiane de BDC

(EB) médiane de ADB

(AB) // (EF)

ABFE est un trapèze

[AB] ⊥ [AD]

[EF] ⊥ [AD]

AB = 8 cm

BC = 12cm

AD = 6cm

DC = 15cm

Annexe 5

Les écrits de 3 groupes :

Combien mesure EF ? 1

assez Bonne redaction Nous avions pensé comme vous.

[AB] ⊥ [AD]
[EF] ⊥ [AD]
Donc [AB] // [EF]
E milieu de [AD]
D'après le théorème des milieux :
① Si une droite est parallèle à un côté d'un triangle et si elle coupe un des deux autres côtés en son milieu alors elle coupe le 3ème côté en son milieu
Donc : F milieu de [DB]

② Un segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est égal à la moitié du 3ème côté.
Donc : $EF = \frac{AB}{2}$

AB = 8 cm
Donc : $\boxed{EF = \frac{8}{2} = 4\text{ cm}}$

Question Calculer la mesure de AF. 2

1. Calcul de DB avec le th de Pythagore (⇒ le carré de l'hypothénuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés d'un triangle rectangle)

$BD^2 = AB^2 + AD^2$
$BD^2 = 8^2 + 6^2$
$BD^2 = 64 + 36$
$BD^2 = 100$ $BD = \sqrt{100}$ $BD = 10$

2. Avec le th des milieux ~~qui dit que~~ (la droite passant par le milieu d'un des côtés parallèlement à un des côtés coupe le 3ème en son milieu) on démontre que F milieu de [BD] donc milieu de l'hypothénuse)

3. Th ⇒ Ds le un triangle rectangle le milieu de l'hypothénuse est le centre du cercle circonscrit.
Donc avec ce th. on montre que le cercle circonscrit du triangle ABD de centre F de diamètre DB et aussi de rayon AF alors BD = 10 = $\frac{1}{2}$ AF = 5
AE = DF = BF = 5 cm
AF = 5 cm

⟶ nous nous étions servit du théorème de pythagore dans le triangle AEF

Calcul de $\hat{B}$: il existe plusieurs angles $\hat{B}$:

- $\widehat{ABD}$
- $\widehat{OBC}$
- $\widehat{ABC}$

Nous calculons $\widehat{ABD}$:

Calcul de BD :

Théorème de Pythagore : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égale à la somme des carré des 2 autres cotés.

Dans le triangle ABD rectangle en A :

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$BD^2 = 8^2 + 6^2$

$BD^2 = 64 + 36$

$BD^2 = 100$

$BD = \sqrt{100}$

$BD = 10$

Cosinus de $\widehat{ABD}$: $\frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$

Cos de $\frac{AB}{BD}$

cos de $\frac{8}{10} = 0,8$

$\widehat{ABD} = 36{,}86$

On a pensé à la même rédact° que vous.

Rédaction assez bien faite.

TITRE

Fonctions de l'écrit dans la classe de mathématiques.

Etude dans le cas de l'enseignement de la racine carrée et de la reprise de la géométrie en classe de troisième.

AUTEURS

A. BRONNER, S. PELLEQUER

DATE

Décembre 2000

EDITEUR

IREM de Montpellier

MOTS CLES

ECRIT - MILIEU - DEMONSTRATION - RACINE CARREE

RESUME

Cette brochure présente une étude didactique sur la place et le rôle des différents types d'écrits dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en classe de Troisième. L'étude propose des éléments de réponses à ces questions à travers des ingénieries que nous avons développé sur deux thèmes mathématiques en classe de Troisième : la racine carrée et la géométrie en lien à l'apprentissage de la démonstration.

OUTILS

Calculatrice - papier blanc - tableau noir

NOMBRE DE PAGES

62

ISBN

2-909916-41-3