Université de Montpellier II

Publication de
l'Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques

# Les unités de méthodologie en Deug

**BELHAJ Dalila - BONAFE Freddy - FAURE Christian - GANNOUN Ali - KIEFFER Françoise - SABY Nicolas - TISSERON Christiane -**

**2000**

IREM
UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2

cc 040 - Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER Cedex 05
Tél : 04.67.14.33.83 - 04.67.14.33.84
Fax : 04.67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr
http://www.irem.univ-montp2.fr

I. R. E. M.
de Montpellier

# Les unités de méthodologie en Deug

**BELHAJ Dalila - BONAFE Freddy - FAURE Christian - GANNOUN Ali - KIEFFER Françoise - SABY Nicolas - TISSERON Christiane -**

**2000**

# PREFACE

*Plus l'élève sera assuré de la réussite*
*par des effets indépendants de son investissement personnel*
*et plus il échouera.*

Cette affirmation de Guy BROUSSEAU[1] peut paraître étrange en exergue d'une brochure sur les questions de méthodologie. Elle permet pourtant bien de faire la différence entre deux pôles :

- La "fiche méthode", présente dans de nombreux manuels scolaires. R. NOIRFALISE[2] met en évidence à ce propos un glissement méthodologique :

  *On peut décrire le processus qui génère ce type de glissement de la façon suivante : la réussite du contrat initial, à savoir résoudre des problèmes mathématiques, nécessitant des heuristiques spécifiques, est difficile pour certains élèves. On tente de réduire la difficulté en leur délivrant des algorithmes de résolution ; le contrat peut devenir alors, pour certains élèves, non pas ce qu'il était à l'origine, mais de savoir appliquer ces algorithmes, ce qui engendre de nouvelles difficultés que l'on peut tenter de régler, à nouveau, par une nouvelle algorithmisation. Ce type de glissement contractuel à coup d'aides algorithmisées est donc un risque inhérent au système d'enseignement.*

- Une approche méthodologique. La commission Inter-IREM Université[3] écrit ainsi :

  *Une méthode ou un ensemble de méthodes sur un champ donné est la description d'un ensemble d'activités du sujet, portant sur l'analyse et le classement de problèmes à résoudre dans un domaine assez précis, l'utilisation des outils et des techniques disponibles, les stratégies et tactiques possibles, la gestion dans le temps des choix des stratégies et de leur déroulement, la conscience de ces choix, les moyens de contrôle et de retour en arrière pour procéder à d'autres choix... Un algorithme produit une réponse, une méthode fournit des questions.*

L'équipe liaison lycée-université de l'IREM de Montpellier propose ici une brochure qui se situe dans cette dernière perspective d'approche méthodologique. Elle se situe aussi dans une continuité d'élaboration : une brochure[4], en 1998, avait déjà recensé les problèmes d'enseignement dans le premier cycle universitaire. Un rapport, réalisé en 2000 dans le cadre académique des groupes d'étude et de recherche[5], avait abordé les questions de continuité et de rupture entre le lycée et l'université.

Cette brochure arrive à point : c'est cette année que s'applique, pour l'université Montpellier 2, la réforme des DEUG, qui met en place des modules de méthodologie. C'est cette année que se mettent en place aussi, dans les classes de 1ère de lycées, des TPE (Travaux Pratiques Encadrés) : dans un cadre interdisciplinaire (mathématiques-physique, mathématiques-biologie, mathématiques-économie), ces TPE requièrent des sujets particuliers, des méthodes de travail spécifiques.

---

[1] BROUSSEAU Guy, 1987, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 7.2., pp. 33-115.

[2] NOIRFALISE Robert, 1994, *Fiche "méthode" : une alerte*, Repères-IREM n°16, pp. 5-10.

[3] Commission Inter-Irem Université, 1990, *Enseigner des méthodes en mathématiques*, Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année, principes et réalisations, IREM, pp. 65-79.

[4] BASCOU Noël & al, 1997, *Liaison lycée-université*, IREM de Montpellier.

[5] BELHAJ Dalila & al., 2000, *Du lycée au post-bac, autonomie et méthodes*, rapport du GER 99 JTA 132 D, IREM et IUFM de Montpellier.

Pourquoi cette approche méthodologique est-elle si nécessaire ? Déjà en 1990 Marc ROGALSKI[6] faisait la liste des défauts auxquels il s'agi(ssai)t de remédier :

> *Les étudiants actuels, et sans doute encore plus de demain si rien n'est fait pour changer cet état de choses, ont une pratique qui irrite souvent les enseignants. Ils préfèrent noter, plutôt que comprendre, ils ne savent pas raisonner, ils ne s'intéressent pas aux commentaires épistémologiques ou historiques, ils posent rarement des questions, ils ne lisent pas d'ouvrages mathématiques, ils cherchent des recettes pour l'examen au lieu d'essayer de comprendre en profondeur les concepts, ils ont des connaissances cloisonnées en tranches très étanches entre lesquelles ils n'arrivent pas à faire de rapports, ils ne pensent jamais que les erreurs ou contradictions apparentes sont sources de questions intéressantes et de meilleure cmpréhension... bref, ils ont une épistémologie scolaire et pas d'épistémologique scientifique du tout.*

Il évoquait quelques remèdes :

> *Problématiser l'enseignement, c'est-à-dire faire en sorte d'apporter des réponses après que les étudiants se sont posé des questions, changer les modalités de travail des étudiants, enseigner des connaissances plus porteuses de sens qu'incitant à développer des recettes, prendre en compte les nouveaux moyens de calcul, pour accéder de façon nouvelle à certains concepts, mettre en place des scénarios d'enseignement et des activités pour les étudiants susceptibles de faire passer ces objectifs...*

Vaste programme, pour la réalisation duquel cette brochure pose quelques jalons. Les conférences, organisées dans le cadre de "l'année 2000, année des mathématiques" par le département de mathématiques et l'IREM, ont été aussi un jalon pour promouvoir les "sciences mathématiques", mettre en évidence la nécessité d'une approche méthodologique et d'une articulation entre les mathématiques et les autres sciences.

Place maintenant à la mise en œuvre de certains "remèdes". Au moment où ils expérimenteront ces nouveaux dispositifs de travail (TPE au lycée, modules de méthodologie à l'université), les enseignants pourront avoir en tête cette belle phrase de Leibniz[7] :

> *Mes écrits ont pour but de rendre l'homme qui étudie capable de savoir l'essence de ce qu'il apprend, de lui faire apparaître la source même de l'invention, afin qu'il puisse tout comprendre comme s'il en était lui-même l'inventeur.*

Luc TROUCHE, directeur de l'IREM

Cette publication a été réalisée grâce :

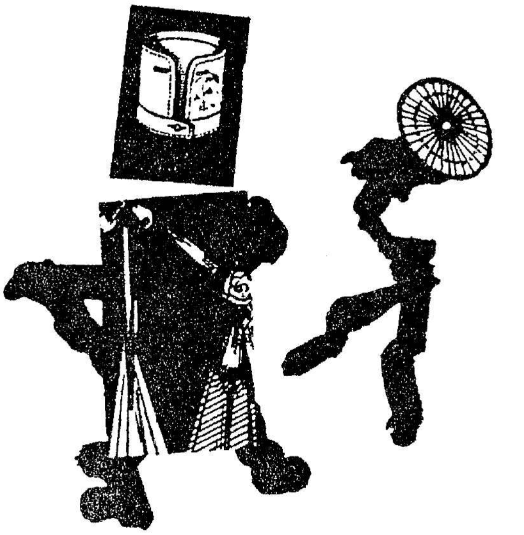
- aux moyens horaires donnés par le département de mathématiques (UFR Sciences de l'université Montpellier 2) pour les enseignants chercheurs ;
- aux moyens horaires donnés par le Ministère de l'Education Nationale (DESCO) pour les enseignants du second degré ;
- aux moyens de secrétariat et de reprographie de l'IREM.

---

[6] Commission Inter-IREM Université, 1990, *Quels étudiants, quels objectifs d'enseignement*, Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, principes et réalisations, IREM, pp. 4-8.

[7] Leibniz G.H., 1700, *Mathematische Schriften*, C.I. Gerhardt éd., Halle, 1855-1863.

# SOMMAIRE



# INTRODUCTION

La réforme des premiers cycles universitaires s'est appliquée à l'Université Montpellier 2 en septembre 2000.
Le second semestre de la première année de DEUG est désormais constitué de trois ou quatre unités d'enseignement, dont u*ne unité de méthodologie disciplinaire centrée sur les exigences pédagogiques et scientifiques de la, ou des disciplines fondamentales* [B.O. n°16 du 17 Avril 1997].
Cette réforme a conduit notre équipe à une réflexion sur l'unité de méthodologie entrant dans la formation dispensée en DEUG Mathématiques. Ne pouvant dissocier les méthodes du contenu, nous avons choisi une approche pragmatique : comment faire fonctionner ce module d'enseignement, quel contenu, quelle forme lui donner ?
Nous avions en esprit, mais non en ligne de mire, les TIPE[1] dans les classes préparatoires puis nous avons été « rattrapés » par les TPE (Travaux Pratiques Encadrés) des classes des lycées. Il nous semble que notre approche s'intègre dans ce dispositif, qui se révèle beaucoup plus global que nous le pensions au début.
Après quelques mentions à des travaux antérieurs, nous présentons une maquette argumentée de ce module. Puis, après une brève présentation des expériences réalisées dans d'autres UFR, nous présentons quelques exemples de sujets rédigés.

Novembre 2000.

L'équipe "Liaison Lycée-Université" :
BELHAJ D., IUT de Perpignan
BONAFE F., lycée Mas de Tesse de Montpellier
FAURE C., lycée Joffre de Montpellier
GANNOUN A., Université Montpellier 2
KIEFFER F., lycée Mermoz de Montpellier
SABY N., Université Montpellier 2
TISSERON C., Lycée Mas de Tesse de Montpellier.

---

[1] Les TIPE (Travaux d'Initiative Personnelle Encadrée) sont conçus en fonction des objectifs suivants (raport de la commission TIPE de la filière "math-physique) :

- développer, sur un thème scientifique ou technologique, l'esprit de questionnement et d'ouverture, le travail personnel (individuel et en équipe) et les capacités d'autonomie, d'initiative, d'argumentation et de communication (recherche et exploitation d'une documentation, préparation et réalisation de dossiers et d'exposés, mise en place d'une argumentation au cours d'un entretien scientifique...) ;
- exploiter, à travers les thèmes proposés, toutes la richesse des démarches scientifiques : mise en évidence et formulation d'un problème, analyse et observation d'un phénomène ou d'un système industriel, modélisation, formulation de conjectues, mise en oeuvre d'outils théoriques et expérimentaux, mise au point d'une solution et justification des choix effectués, contrôle des résultats obtenus, analyse de leur portée, de leur domaine de validité et de leur pertinence au regard du problème posé, place de ce problème dans le développement des sciences et de leurs applications ;
- développer la capacité à mobiliser de façon coordonnée les compétences acquises dans les différents chapitres d'une discipline ou dans les différentes disciplines pour l'étude de problèmes de nature plus globale, valoriser les ineractions entre les champs de connaissance et contribuer à une ouverture culturelle de la formation dispensée ;
- renforcer la motivation des étudiants et valoriser des profils scientifiques variés, grâce à une diversification des thèmes proposés et à la mise en oeuvre de nouvelles méthodes de travail ;
- en revanche, l'acquisition de connaissances n'est pas l'objectifs des travaux d'initiative personnelle encadrés. L'objectif scientifique des TIPE est très modeste ; il ne s'agit en aucun cas de travaux de recherche au sens professionnel du terme.

# I. A PROPOS DE METHODOLOGIE

## Le Larousse

Méthodologie : « Partie de la logique qui étudie *a posteriori* les méthodes des différentes sciences et leurs types de connaissances ».
(Figure un renvoi vers "épistémologie").

Méthode : « manière d'exposer des idées, de découvrir la vérité, etc, ..., selon certains principes et dans un certain ordre, caractérisant une démarche organisée de l'esprit ».
(Référence à Descartes).

## Quelques travaux sur la méthode

DESCARTES et son « Discours sur la méthode », POINCARE avec « Science et méthode ».

Plus localisé : LEMAIRE avec « Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de géométrie » [LEMAIRE, 1904].

Plus actuel : LEGRAND avec « Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode » [LEGRAND, 1990].

Et aussi : G.POLYA, « Comment poser et résoudre un problème » [POLYA, 1965].

I. LAKATOS « Preuves et réfutations. Essai sur la Logique de la découverte mathématique » [LAKATOS, 1984].

## La quête Iremique

Le mot « méthode (ou méthodes) » se rencontre dans de très nombreux articles ou documents, le « Repères-IREM » n° 16 lui est totalement consacré.

Pour ce qui est de l'enseignement secondaire, les travaux autour des modules reviennent régulièrement sur les méthodes. Ainsi dans QUATRE FONCTIONS DE L'ENSEIGNEMENT MODULAIRE [BASCOU & al, 1993], deux sont identifiées comme « acquisitions de méthodes générales de travail » et « acquisitions de méthodes de résolution de problèmes».

Pour ce qui est de l'enseignement universitaire, ce sont les travaux de l'IREM de Lille et de la commission Inter-IREM Université qui sont cités en référence.

Ainsi, dans ENSEIGNER AUTREMENT LES MATHEMATIQUES EN DEUG A [CIIU, 1990], on trouve une liste d'objectifs possibles pour un enseignement des méthodes, objectifs vers lesquels tend habituellement un professeur de mathématiques. On trouve aussi des précisions sur le sens à donner au mot « méthode » si on doit en faire un enseignement spécifique.

*Ce que ce n'est pas* : une méthode aux sens intra-mathématiques, c'est-à-dire une manière de résoudre des problèmes correspondant à l'introduction d'une nouvelle théorie, ou bien des techniques qui servent dans divers domaines, ou encore des algorithmes adaptés à un domaine plus ou moins étroit.

*Ce que c'est* : une méthode au sens « métamathématique », c'est-à-dire : comment penser à un « truc » qui a déjà marché pour le réutiliser, il s'agit en fait d'heuristique.

## Notre vision

Nous avons adhéré à l'approche de M. ROGALSKI qui, en 1990, faisait le constat suivant, toujours d'actualité :

> « *Une grande distance existe la plupart du temps entre l'essentiel de l'enseignement dispensé et la nature des contrôles qu'on fait subir aux étudiants* ».
>
> *D'un côté des définitions, des théorèmes, des démonstrations, dans un discours presque toujours réservé aux enseignants et se présentant le plus souvent comme des réponses à des questions non posées, de l'autre, des problèmes à résoudre par les étudiants avec plus ou moins d'indications et avec une utilisation partielle de l'enseignement qui précède* » [CIIU, 1990].

Ceci induit un déficit profond sur les moyens pour résoudre les problèmes. Ce qui a comme conséquence que seule une partie des étudiants arrive à s'en sortir. Laisser deviner la solution d'un problème par les étudiants n'est profitable qu'à une minorité d'entre eux.

> « *Il est courant que face à un problème, les étudiants soient au départ bloqués puis ils démarrent souvent dans une direction qui a peu de chance d'aboutir. Ils sont toujours à la recherche d'une recette ou d'une astuce et sont incapables d'envisager une démarche longue et complexe* ».

C'est une conséquence de l'habitude prise par les enseignants de proposer des problèmes découpés en petits morceaux sans vraie difficulté et avec beaucoup d'indications. Ne poser que des exercices fermés ou avec indications crée une dépendance chez l'étudiant : il est en attente permanente d'une aide de l'enseignant. Cette attitude ne développe pas chez l'étudiant un esprit critique et de recherche ni une véritable autonomie. L'enseignant doit jouer le rôle du guide et du facilitateur qui aide les étudiants à comprendre le jeu auquel on joue et à s'approprier des connaissances mathématiques.

De même, il faut quitter le cercle vicieux : les étudiants ne parviennent pas à résoudre les problèmes, on leur facilite la tâche ce qui entraîne de moins en moins d'effort de leur part.

M. ROGALSKI a aussi dégagé un certain nombre d'objectifs à réaliser dans l'enseignement d'une méthode de travail qui nous semblent bien adaptés à ce module de méthodologie :

Cet enseignement aura les objectifs suivants :
1. Permettre de mieux saisir les concepts d'un domaine par leur caractère opératoire pour la résolution de problèmes.
2. Habituer à classer des connaissances mathématiques, des problèmes, des inconnues, des situations.
3. Permettre de démarrer une recherche sur un problème.
4. Donner les moyens d'organiser une stratégie de recherche y compris pour des processus d'une certaine ampleur sur le déroulement desquels des anticipations pourraient être faites.
5. Habituer aux changements de point de vue sur un sujet, aux reformulations d'un problème sous des formes différentes.
6. Permettre de prendre conscience de ce qu'on est en train de faire, des choix de recherche qu'on a faits, et ainsi de pouvoir explorer toutes les possibilités.
7. Se doter de moyens de contrôle et de vérification de ce qu'on fait.
8. Rendre disponibles des connaissances auxquelles on ne pense pas toujours à avoir accès.
9. Contribuer à changer chez les étudiants la représentation qu'ils ont de l'activité mathématique et la rendre plus proche de celles qu'en ont les mathématiciens.
10. Augmenter la confiance en eux des étudiants et les rendre plus autonomes.

Nous nous intéressons aux méthodes dont le sens est proche du mot heuristique, l'idée étant de réduire le champ des problèmes pour permettre des classifications (des problèmes, des outils, ...), limiter les choix et choisir la meilleure stratégie.

Ainsi, nous reprenons la définition de "méthode" de M. ROGALSKI comme étant :

*« - La description d'un ensemble d'activités du sujet, portant sur l'analyse et le classement de problèmes à résoudre dans un domaine assez précis.*

*- L'utilisation des outils et des techniques disponibles, les stratégies et tactiques possibles.*

*- La gestion dans le temps des choix de stratégies et de leur déroulement.*

*- La conscience de ces choix, les moyens de contrôle et de retour en arrière pour procéder à d'autres choix ...*

*Un algorithme produit une réponse, une méthode fournit des questions : quoi, pourquoi, comment, par quels moyens... et donne des outils pour gérer et contrôler la recherche des réponses.*

*Pour l'élaboration d'une stratégie, plusieurs points sont à prendre en considération :*

*(i) Intégrer le cas échéant au niveau de la méthode les erreurs ou blocages persistants chez les étudiants. Par exemple, dans l'étude des suites, l'usage de la récurrence bute sur les difficultés du "raisonnement sous hypothèse » ; il faudra donc aborder la question dans la méthode.*

*(ii) Mettre en évidence les divers cadres (numérique, graphique,...) dans lesquels fonctionne la méthode, et favoriser les changements de cadres dans les activités des étudiants prévues par la méthode, à cause de leur efficacité épistémologique (donc pour résoudre des problèmes) et de leur efficacité didactique. C'est un aspect important de l'idée de "changement de point de vue" qu'on trouve dans de nombreuses heuristiques.*

*(iii) Développer la démarche stratégique et organisationnelle, prévoir un temps d'explication par les étudiants de leur démarche qui leur permettent de prendre conscience des choix faits pour essayer de résoudre un problème, et donc des pistes non explorées vers lesquelles on pourra revenir si besoin est.*

*(iv) Prévoir très explicitement des procédures de contrôle et de retour en arrière (automatiques et inconscientes chez le mathématicien, elles ne sont pas naturelles chez les étudiants), s'articulant sur la conscience des choix faits évoqués ci-dessus.*

*L'enseignement d'une méthode doit se faire d'une manière explicite. Des activités préalables sont nécessaires pour amener les étudiants à dégager un certain nombre de constats, et prendre conscience de ce qu'apporte la méthode, de ses possibilités et ses limites, en articulation avec les connaissances du domaine. Les problèmes sans indication contribuent fortement à cette prise de conscience »* [CIIU, 1990].

## Objectifs

Un des objectifs importants de ce module est de réussir à susciter des interrogations, des questions pertinentes chez les étudiants et d'en faire des acteurs contribuant à la construction de leurs connaissances plutôt que des spectateurs subissant une information surabondante sans aucun moyen de démêler le vrai du faux, l'important de l'inutile. Une conséquence est la construction de sa propre épistémologie. L'étudiant doit acquérir une maturité scientifique permettant une confrontation argumentée et décomplexée des différentes épistémologies, ne laissant nulle place aux arguments d'autorité. L'élève mature ne cherchera pas que le profit immédiat, c'est-à-dire la note ou l'examen, mais il deviendra acteur de sa connaissance scientifique.

Un autre objectif important est de faire sortir les étudiants du schéma habituel où un bachotage de recettes plus ou moins comprises suffit pour réussir ses examens et par conséquent ses études. Il faut que l'étudiant arrive à se débarrasser de l'idée minimaliste de l'élève (avoir son examen) et à viser plus haut. Il doit avoir l'ambition d'apprendre et de comprendre. Bref, on doit cultiver la curiosité scientifique chez lui.

Mais alors comment concevoir ce module de méthodologie ?

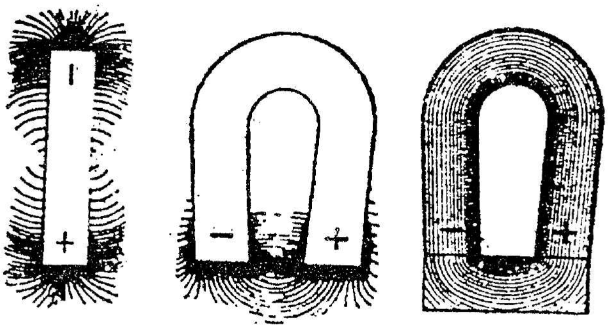
Une séance de méthodologie doit être un questionnement permanent et non un monologue.

Les questions des étudiants doivent leur permettre d'aller plus loin, d'approfondir leurs connaissances et d'aiguiser leur curiosité scientifique. Par ces questions, ils cherchent à construire un bagage mathématique ou à lui donner un sens.

Il est certain, dans cette optique, qu'une méthode n'est en aucun cas un escabeau pour résoudre un exercice.

Ce module sera organisé autour de « Travaux Personnels Encadrés » accordant une place importante à **l'exposé oral** et aux confrontations des idées. Le contenu s'articulera autour de thèmes retenus pour leur importance stratégique, pour les lacunes qui leur sont notoirement attachées :

- **Logique,**
- **Définition,**
- **Modélisation,**
- **Conjectures et preuves** (voir chapitre IV).



# II. MAQUETTE DU MODULE DE METHODOLOGIE

## Le cadre

Il y a trente heures de méthodologie réparties sur dix semaines à raison de deux séances d'une heure et demie par semaine.

La première semaine (deux séances) sera consacrée à la négociation du contrat du TPE avec les étudiants (voir chapitre III) et aux présentation et répartition du travail du module.

Quatre sujets sont proposés à l'ensemble des étudiants du module qui se répartissent équitablement autour de ces sujets. Chaque sujet est traité par des trinômes.

La démarche proposée pour traiter ces sujets est la suivante :

a. comprendre le problème ;
b. sortir et localiser les difficultés ;
c. proposer des modèles ;
d. poser les définitions ;
e. conjecturer et prouver ;
f. retourner au problème initial et l'ouvrir à d'autres questions ;
g. rédiger et exposer.

## L'organisation des séances

L'organisation peut être la suivante :

- deux séances où l'on fait le point sur les différents sujets,
- une séance de synthèse globale où l'on fait le point sur les différents thèmes du module.

Le but de cette séance de synthèse est d'institutionnaliser les connaissances et les concepts dégagés autour des quatre thèmes retenus : logique, définition, modélisation, conjectures et preuves. Les étudiants reprennent ensuite le travail sur leurs TPE respectifs pour la séance suivante.

L'état final du TPE sera donné à la fin du module sous la forme d'un rapport écrit prenant en compte toutes les remarques et suggestions faites au cours des séances et d'un exposé oral, les deux productions participant à l'évaluation.

## Le déroulement d'une séance

Une séance d'une heure et demie pourrait se dérouler comme suit :

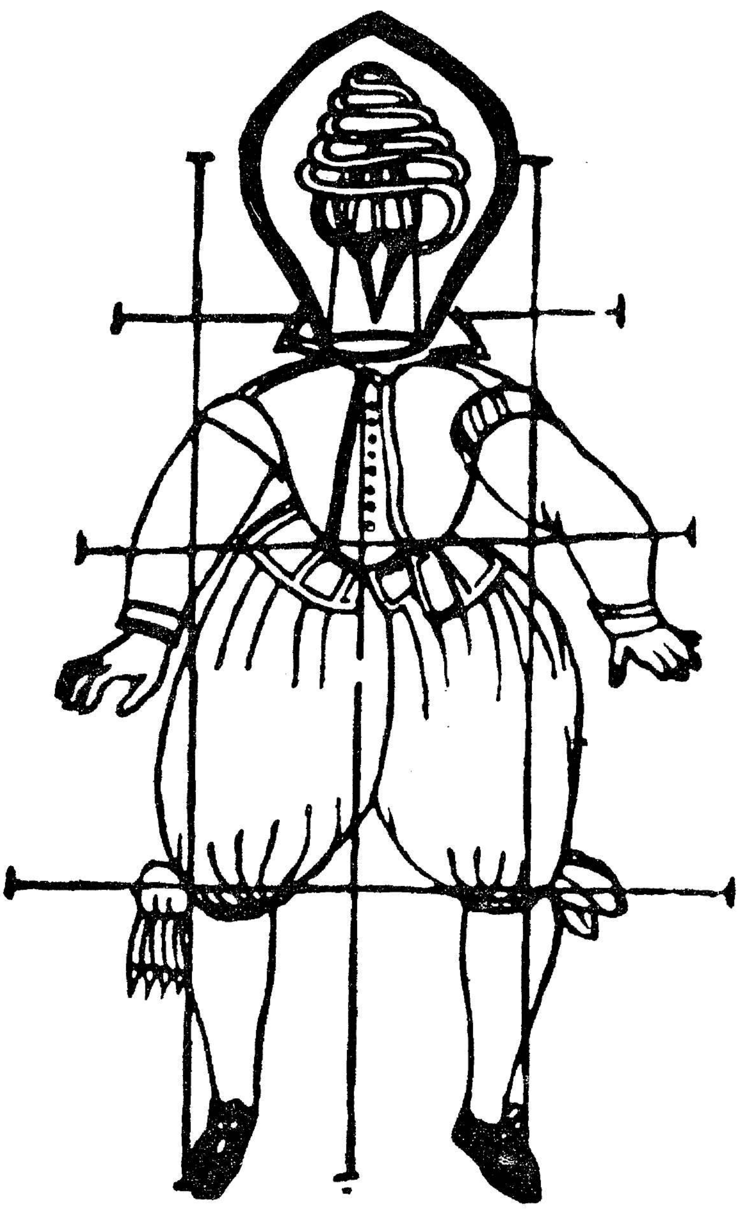
1. Un exposé oral de l'état de l'avancée des recherches qui dégagerait ce qui est compris de ce qui ne l'est pas.
2. Un débat avec l'ensemble des étudiants et l'enseignant sur les directions à envisager, les améliorations à apporter.

Ces deux étapes doivent durer 45 minutes et, dans une séance, on doit pouvoir faire le point sur l'état de deux TPE. Il faut veiller à ce que tout le monde participe à ces activités en adoptant le plus possible un langage précis et concis.

## L'évaluation

L'évaluation doit prendre en compte le travail sur les sujets fait par les étudiants ainsi que le travail de compréhension et d'assimilation du travail des autres. Cette évaluation, sous forme d'une note, tiendra aussi compte de la qualité :

- de la production écrite ;
- des différents exposés oraux au cours du semestre ;
- des interventions et des apports fournis au cours des différentes séances.

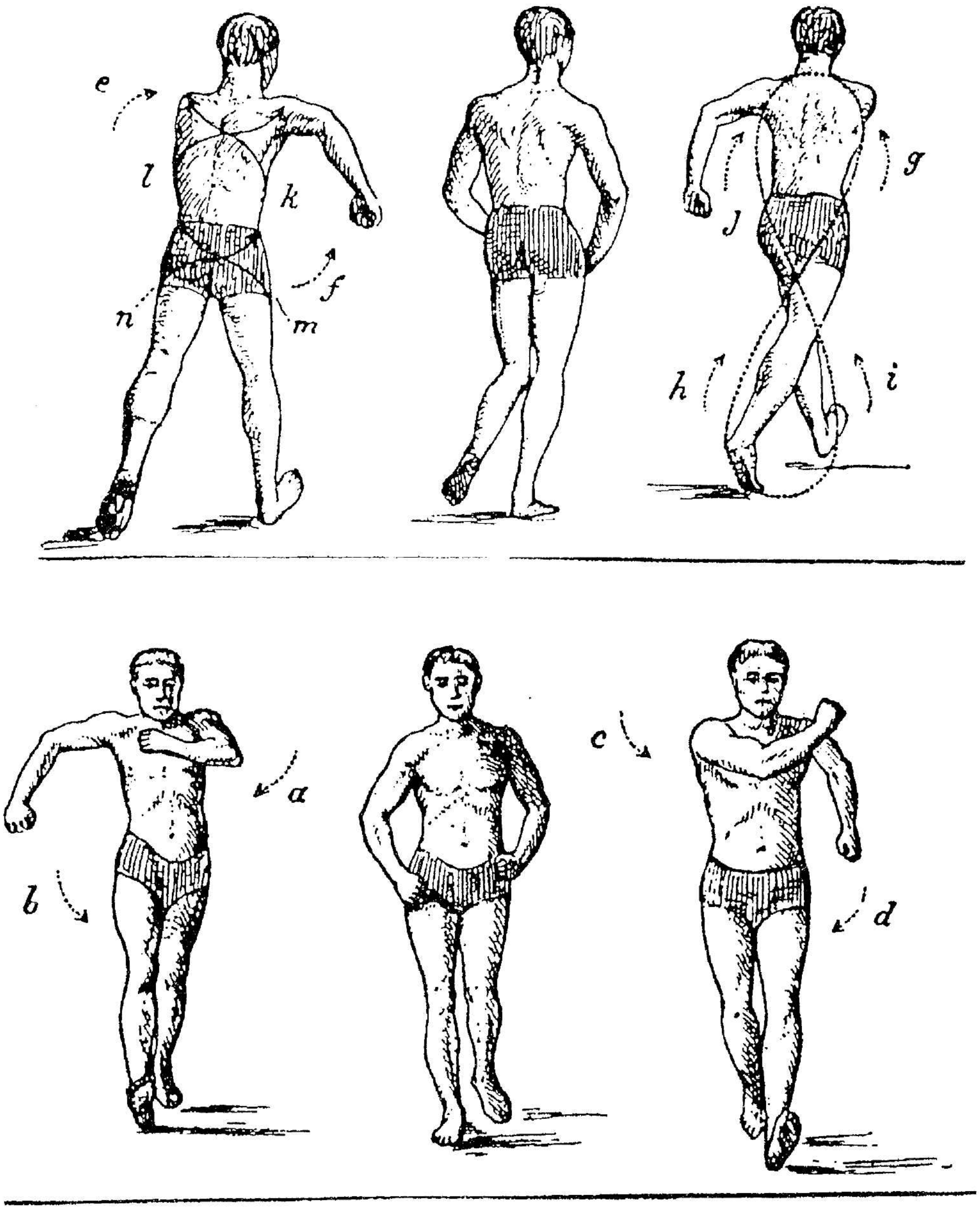


# III. ELEMENTS D'UN CONTRAT A DESTINATION DES ETUDIANTS

Comme cela a été développé précédemment, le travail qui va être demandé aux étudiants aura une forme et un esprit qui, sensiblement, diffèrent du format cours - TD.

Pour des étudiants qui n'ont pas l'expérience des TIPE des classes préparatoires ou de TPE qui seront installés en lycée, il sera certainement utile de préciser les attendus de ce module par une information prenant, par exemple, la forme d'un contrat.

Ce contrat pourrait contenir des informations sur l'organisation pratique du module comme cela a été développé dans le chapitre qui précède.



## CONTRAT PROPOSE AUX ETUDIANTS

### Présentation du travail

Le but de cet enseignement de méthodologie est d'arriver à ce que vous mettiez du sens sur les concepts mathématiques introduits en cours.

Cet enseignement de méthodologie ne sera pas un enseignement de méthodes au sens de :

- manière de résoudre un problème,
- technique,
- algorithmes,
- exercices types.

Il s'agit plutôt d'une méthode au sens « métamathématique », c'est-à-dire « À quel jeu on joue lorsqu'on fait des mathématiques ? » En quelque sorte, il s'agit de s'approprier le discours du cours de mathématiques sur les définitions, les théorèmes, les démonstrations.

L'activité qui vous sera proposée sera donc portée par des sujets de recherche dans lesquels vous aurez à développer vos propres définitions, vos propres théorèmes et vos propres preuves.

Nous aurons quatre thèmes à travailler ensemble et qui sont porteurs de sens sur l'activité mathématique. Ces thèmes portent sur :

- LA LOGIQUE : *quelle est la logique du mathématicien ?*

- LA MODELISATION : *dans quel cadre, dans quel modèle résoudre ce problème ?*

- LES DEFINITIONS : *qu'est-ce qu'une définition en mathématiques ?*

- LES CONJECTURES ET LES PREUVES : *qu'est-ce qu'une conjecture, un théorème, une preuve ?*

Tout au long de votre recherche, vous garderez à l'esprit qu'un résultat partiel, qu'une proposition fausse, qu'une question sans réponse, peuvent être des étapes très intéressantes de votre travail.

### Forme du travail

Ce module sera organisé autour de T.P.E. : « Travaux Personnels Encadrés » accordant une place importante à l'exposé oral et aux confrontations d'idées.

- ***Qu'est-ce qu'un TPE ?***

Un TPE sera un problème « ouvert » sur lequel vous aurez à travailler par groupes de trois. Environ trois groupes travailleront sur un même sujet de TPE.

- ***Qu'est-ce qu'un problème ouvert ?***

Un problème ouvert est un problème sans cadre bien défini ou sans question académique. Il ne s'agit pas de résoudre une équation par une méthode discutée en cours ou apprise par cœur. Il s'agit d'une question assez naïve mais suffisamment consistante pour ne pas avoir de réponse immédiate ou qui a plusieurs réponses suivant comment on envisage cette question.

Il y aura un travail de modélisation qui délimitera le cadre dans lequel on espère résoudre le problème. Dans ce modèle, on fera des choix de définitions et notre problème initial appellera des conjectures qui seront confirmées par des preuves ou infirmées par des contre-exemples.

Le but sera de produire des modèles de plus en plus riches dans lesquels on peut répondre à la question initiale.

***Comment fonctionnera ce module ?***

On respectera trois phases dans ce module :

1. Je cerne le sujet ;
2. Je me documente, je cherche, j'expérimente ;
3. Je produis et je soumets à mes pairs, lors des exposés oraux, l'avancée de mon travail.

Le travail, sur le TPE, démarrera sur le point 1, et sera ensuite des allers-retours entre les points 2 et 3.

- ***Comment se déroulera une séance ?***

Une séance d'une heure et demie se déroulera comme suit :

1. A tour de rôle, deux groupes de TPE feront un exposé oral de l'état de l'avancée des recherches qui dégageant ce qui est compris de ce qui ne l'est pas.
2. Un débat avec l'ensemble des étudiants et l'enseignant sur les directions à envisager, les améliorations à apporter.

Ces deux étapes dureront environ 45 minutes et, dans une séance, tout le monde participe aux débats, il n'est pas question de s'imaginer concerné uniquement par son propre sujet.

Les questions aux groupes qui ont fait les exposées sont particulièrement bienvenues. Vous pouvez bien sûr émettre des suggestions, proposer des solutions.

- ***Une recommandation importante***

Il sera important aussi que vous teniez un « carnet de bord » dans lequel, vous consignerez quels ont été et quelles sont vos démarches de recherche (B.U., multimédia, contacts personnels...), vos questions ainsi que les éléments de débats avec les étudiants lors des séances d'exposés oraux.

Adoptez le plus possible un langage précis et concis, ce carnet de bord sera aussi un témoin de votre travail.

## Rôles respectifs

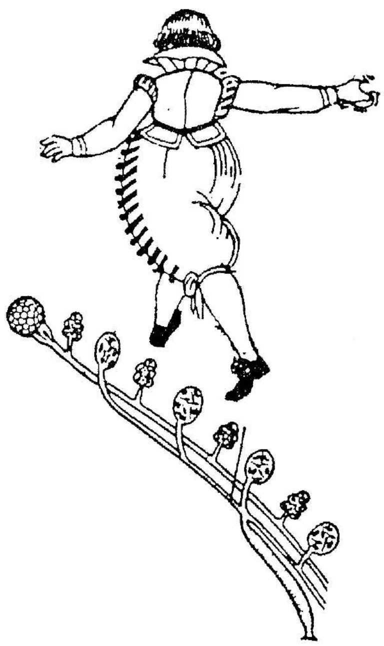
*Rôle des professeurs :*

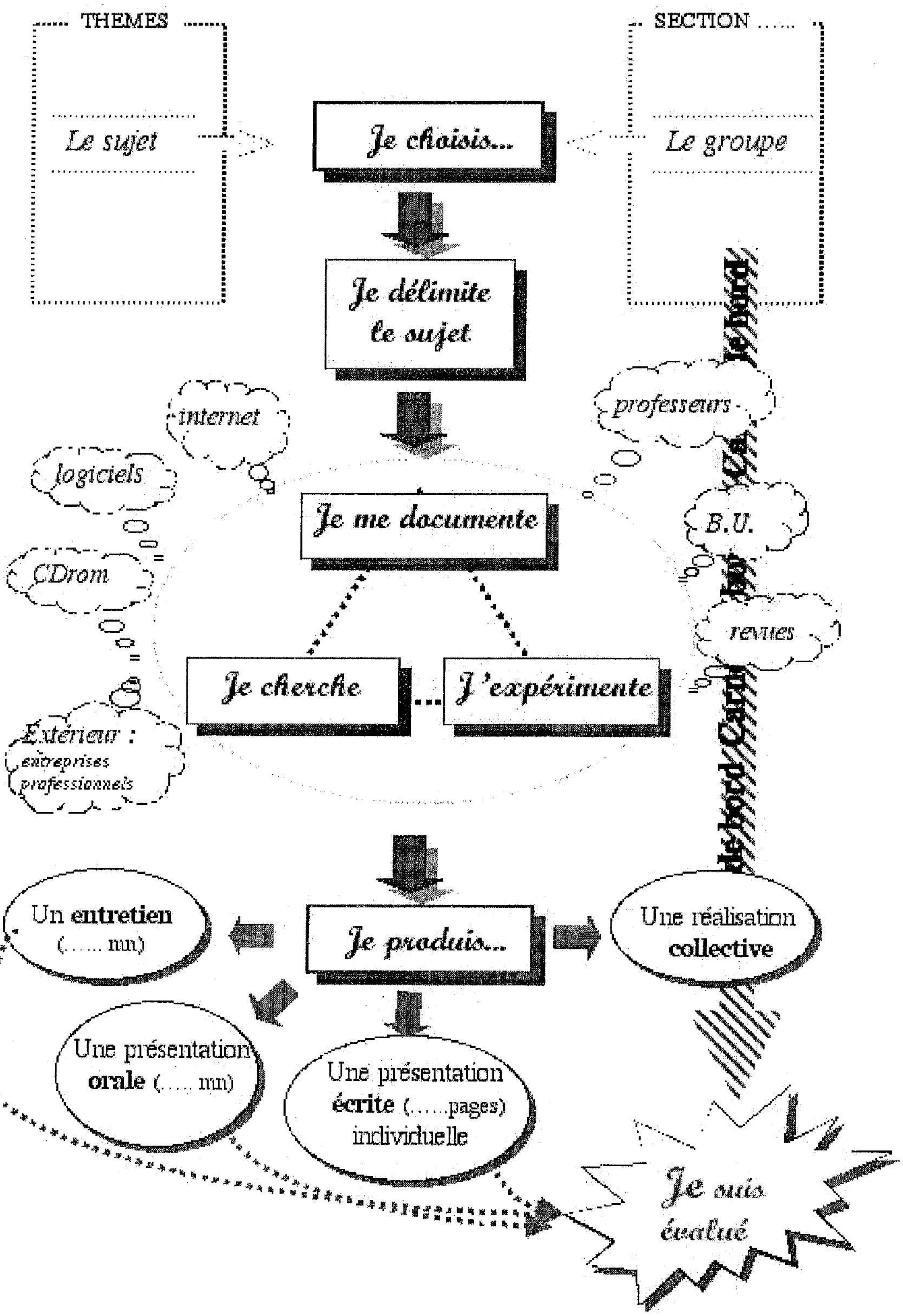
Nous, professeurs, sommes là pour vous permettre de découvrir ces savoirs, vous en faciliter l'appropriation, vous donner les moyens de comprendre.

*Votre rôle :*

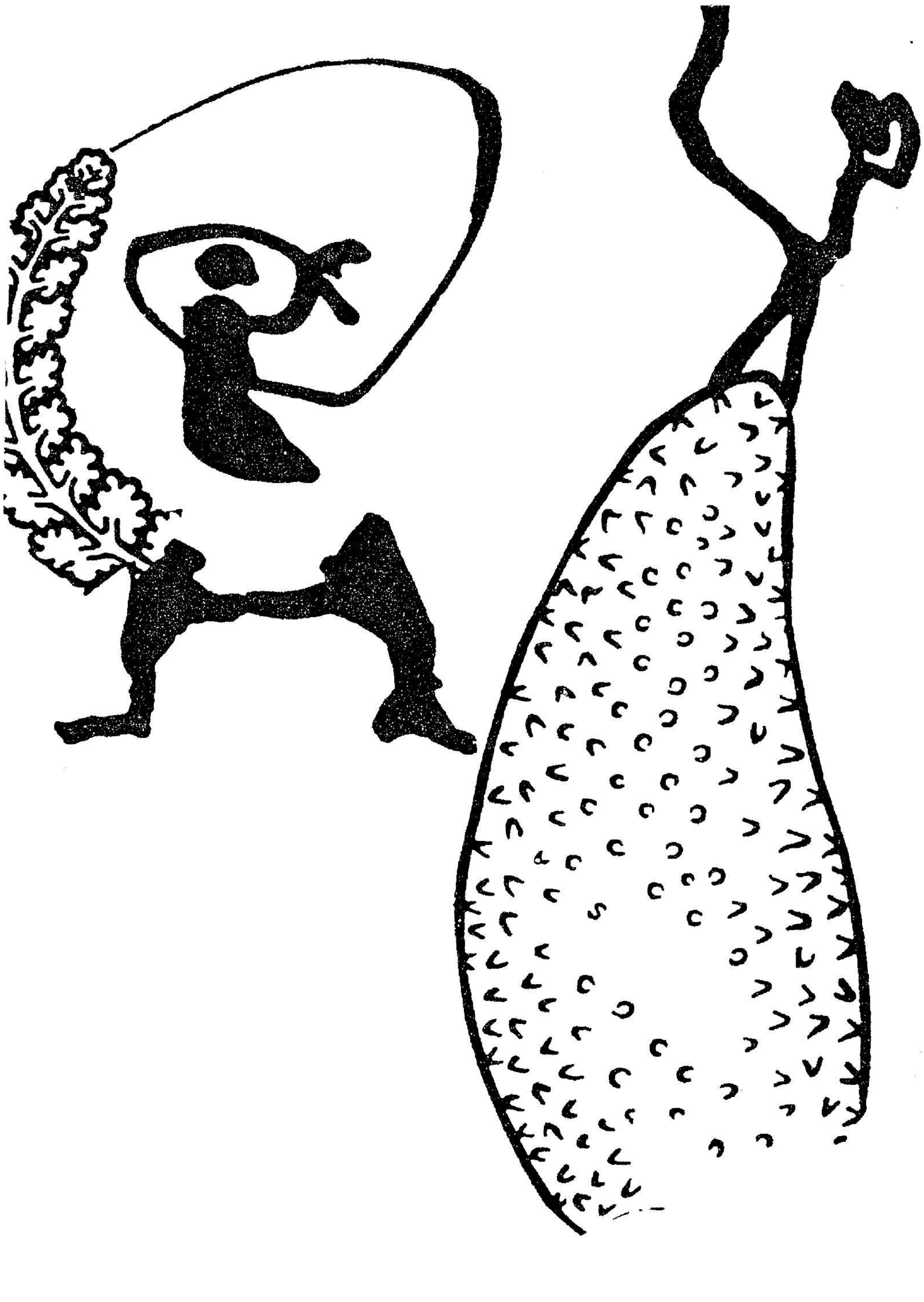
Vous venez faire des études scientifiques supérieures, donc apprendre des connaissances scientifiques fondamentales. L'éthique de votre travail dans ce module peut s'exprimer par :

1. Je cherche à donner du sens.
2. Je n'esquive pas les problèmes.
3. Je ne triche pas dans la recherche de la vérité.






TPE : proposition d'organisation et de déroulement.



# IV. Arguments pour une maquette

Nous avons retenu un protocole de type « Travaux Personnels Encadrés » pour la place importante accordée à l'exposé oral.

Dans les contenus doivent s'exprimer :

1. un travail sur la logique ;
2. une réflexion sur la définition ;
3. un travail de modélisation ;
4. des démarches par conjectures et preuves.

Nous avons relevé ces points pour leur importance stratégique dans la formation scientifique. Dans ce qui suit, nous détaillons l'adéquation du format donné à ce module avec les diagnostics qui nous ont fait retenir ces points en partant d'un constat, en dégageant des composantes importantes puis en recommandant des moyens.

## L'exposé oral : un élément important de la forme

### Constat

Il nous semble que les étudiants souffrent aussi bien d'un déficit d'expression orale qu'écrite. Beaucoup d'étudiants sont surpris et mécontents quand un enseignant sanctionne une copie presque illisible, criblée de fautes d'orthographe et de grammaire, une résolution non structurée, chaotique, des conclusions non justifiées.

Les productions écrites des étudiants, devoirs rendus et copies d'examens, sont souvent très peu soignées. Les occasions de comparer les productions écrites des élèves de Terminales et celles d'étudiants en Première Période montrent une dérive importante du soin et de la forme. Les performances orales restent, elles aussi, très médiocres.

Tous les modes d'expression révèlent une logique plus qu'approximative et une très faible aptitude à détecter les non-dits dans une démonstration ou à préciser les attendus d'un théorème. Une verbalisation forte, telle celle qui est nécessaire à un exposé devant un public, va susciter un retour sur une première production pour en améliorer la logique.

D'autre part, si les comportements volontaristes et autonomes sont certes des aptitudes personnelles, le premier cycle universitaire est chargé d'une image très négative quant à l'expression de ces aptitudes. Ne faudrait-il pas quelque peu forcer cette attitude attentiste que déplorent particulièrement les enseignants chargés de T.D. ?

## Objectifs

Un travail continu d'exposition au cours de ce module doit permettre de faire progresser les étudiants.

On devrait arriver à une présentation précise et ciblée de travaux et résultats capable d'intéresser un auditoire parfois non initié. Une forme soignée semble une exigence minimale, mais un exposé ne doit bien sûr pas être une récitation ou une lecture de transparents.

La tentation est grande de limiter le champ de cette activité aux concepts directement évoqués par le programme et, en fait, de ramener celle-ci à un exercice de TD quelque peu solennel. Or, nous avons déjà fait l'expérience de l'exposé d'une solution proposée par un étudiant devant ses pairs : très souvent la solution présente des lacunes de raisonnement et va de non-dits en non-dits plus ou moins consensuels. Pour ces raisons, nous privilégions des travaux avec une composante recherche et dont l'intitulé ne renvoie pas strictement aux savoir-faire développés en TD ou exigibles pour un examen.

Pour développer une autonomie chez l'étudiant, cette recherche doit rester modeste dans ses ambitions mais être assez consistante pour motiver initiative et réflexion sur les concepts mis en jeu.

Ces travaux de recherche peuvent être de trois types :

- Recherche en "profondeur" sur un cas bien délimité dont l'exploration tend à être exhaustive.
- Recherche en "largeur" sur un cas abordé avec divers points de vue et mettant en œuvre des outils mathématiques, informatiques variés.
- Recherche sollicitant une forte structuration (cas, sous cas, sous-sous cas, ...).

Pour ne pas brider un esprit d'initiative que nous voulons encourager, il faut valoriser les résultats partiels et la formulation de conjectures. Un objectif important sera de rompre avec l'approche naïve selon laquelle un résultat conclut une question et nuancer la bivalence : exact / faux. Le « contrat » avec les étudiants devra être tout à fait explicite sur ce point. En particulier, un historique de la recherche pourra être valorisé sinon exigé. En fournissant les références bibliographiques, on donne aux étudiants les premiers moyens de leur autonomie.

## La forme

En cohérence avec le constat préalable et l'esprit que nous venons de préciser, nous avons choisi la forme " Travail Personnel Encadré" (TPE) car il semble le mieux convenir que l'on veut atteindre dans ce module.

Le travail peut se faire en groupe ou individuellement.

Le format individuel évite le détournement classique où certains éléments du groupe se déchargent entièrement sur les autres membres du groupe, biaisant ainsi l'évaluation du travail.

Le format groupe apporte des composantes supplémentaires à cette activité : coordination, communication, recherche de consensus... Ces composantes nous paraissent très importantes d'autant qu'elles sont fortement négligées dans tous les cursus. Par son aspect relativement novateur, le format groupe apporte quelques garanties que cette activité ne dégénère pas trop facilement en « devoir maison ».

## Les contenus

### La logique

- *Le constat*

L'activité mathématique dominante dans nos enseignements, les compétences sanctionnées dans nos différents examens entraînent malheureusement les étudiants vers la recherche de recettes, d'algorithmes, au détriment de raisonnements et de preuves.

Suivant le principe d'économie, l'élève ne se sentant pas obligé de rentrer dans un jeu plus difficile de raisonnement, reste dans un profil d'examen. Les élèves, souvent initiés à travers quelques démonstrations magistrales ou par bribes orales, n'ont pas une connaissance des méthodes élémentaires de démonstration et raisonnement.

Un élève ne fait pas la différence entre :

- raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée,
- condition nécessaire et condition suffisante,
- implication et équivalence.

La difficulté ne se situe pas seulement dans la simple absence de pratique : l'élève doit en plus dépasser le conflit entre la logique du quotidien et la logique mathématique. Ainsi, peu d'élèves font la différence entre « il faut » et « il suffit » et, bien sûr, le « si » est souvent mal utilisé.

L'utilisation des quantificateurs n'est pas une compétence construite dans le cursus secondaire et, sinon à travers le concept « d'évènement contraire » en probabilités, les élèves ont très peu manipulé la négation d'une proposition.

- *Les objectifs*

En raison du besoin de supports écrits en logique, il s'agit de faire passer cette tradition orale sur papier. L'objectif est d'aider l'étudiant à acquérir l'« autonomie » logique (langage, raisonnement) qui lui manque.

Les démarches logiques doivent fonctionner d'abord, et avec une certaine efficacité, avant d'être explicitées et intégrées dans une théorie.

La théorie des ensembles semble être un bon support pour l'initiation à la logique du raisonnement et pour illustrer les méthodes de démonstration.

- *La forme*

On pourra proposer :

- Des exercices sur des expressions à contenu logique, de la langue usuelle.
- Des exercices et des problèmes, d'attention, et de raisonnement, nécessitant progressivement l'examen de tous les cas possibles, la disjonction des cas...
- Des problèmes à contenu mathématique réinvestissant les démarches ci-dessus.
- Des exemples illustrant les méthodes usuelles de démonstration [CONDAMINE, 1996].

Plus particulièrement, on soulignera l'importance :

- De travailler la notion d'implication : les propositions étant formulées fréquemment sous la forme si... alors...
- De définir le quantificateur existentiel, jusqu'alors pratiquement inconnu.
- De mettre en évidence l'importance de la place des quantificateurs.
- D'apprendre à utiliser les symboles.
- De traiter des problèmes d'existence et d'unicité.

## La définition

*« Le lecteur trouvera dans le présent fascicule toutes les définitions et tous les résultats de la théorie des ensembles (....) En ce qui concerne les notions et les termes introduits ci-dessous sans qu'il en soit donné de définition, il pourra se borner à leur attribuer leur sens usuel. »*

[BOURBAKI, 1939]

- ***Le constat***

Au lycée, on définit une notion en la construisant, la désignant, la représentant, la manipulant. Bref, on "définit" (on utilise davantage le verbe que le substantif). C'est le cas notamment de la notion de limite d'une fonction ou de celle de limite d'une suite.

La définition - description (proche du sens du langage commun) et la définition–existence (sens spécifique aux mathématiques) sont parfois mêlées. Il en est ainsi, par exemple, de la définition du barycentre d'un système de points pondérés qui fait appel aux deux aspects.

Pour la plus grande partie des notions ou des objets mathématiques manipulés, les élèves ne disposent que de ce que Bourbaki nomme leur sens usuel. On doit reconnaître que ce dernier est souvent suffisant pour ce qui leur est demandé. Tout ce qui se réfère aux angles, par exemple, ne nécessite dans le secondaire qu'une référence à l'angle géométrique et à un sens de parcours.

Pourtant, très tôt, on peut leur montrer que le sens usuel s'avère parfois insuffisant. Le terrain des figures géométriques et particulièrement celui des quadrilatères fournit un bon champ expérimental, et ce n'est pas le seul.... Dégager une propriété caractéristique de diverses propriétés est un pas intéressant vers la définition comme base du raisonnement. Mais le flou reste la règle aujourd'hui, et ce flou ambiant dans le secondaire ne permet guère de construction solide d'éléments d'une théorie quelle qu'elle soit.

Les étudiants, à l'arrivée en DEUG, méconnaissent donc l'activité mathématique telle qu'elle est pratiquée à l'Université. En particulier, ils ne voient pas la nécessité d'une définition claire et rigoureuse des objets qu'ils vont devoir manipuler.

- ***Les objectifs***

  - Instituer ce qu'est une activité mathématique.
  - Initier les étudiants aux règles du jeu.
  - Convaincre de l'intérêt d'une définition.

Une définition est une convention. Elle apparaît donc, en premier lieu, comme un raccourci syntaxique. Elle n'est pas arbitraire mais construite et évolutive et il faut le montrer ainsi que le fait [LAKATOS, 1984].

Pour cela, on devrait :

- Montrer qu'elle distingue l'objet défini des autres objets d'une même classe. Ainsi tous les mots de la définition sont utiles (la théorie des ensembles, les structures fournissent un bon terrain de mise en œuvre).
- Montrer qu'elle répond à un besoin (par exemple, les définitions d'injectivité et surjectivité, sont suscitées par les conjectures sûres).
- Montrer qu'elle est évolutive. Une notion n'est pas achevée dans sa définition. Elle évolue selon les niveaux ou les besoins, elle s'enrichit par le développement de ses propriétés et par toutes ses occurrences ultérieures (c'est le cas de la continuité, de la limite d'une fonction en un point, de la notion de groupe, de l'unicité d'équation, homo-isomorphisme, groupes finis cycliques etc)
- Montrer qu'au cours de son parcours (collégien, lycéen, étudiant) il convient que chacun se donne de façon plus en plus précise les outils du raisonnement mathématique. La définition est bien un de ces outils.

Apprendre à donner du sens à une définition logiquement correcte par la recherche d'une image qui donnera à la définition une réalité véritable.

> « *Quand nous donnons une définition, c'est pour nous en servir. Sous chaque mot ils (ceux qui l'utiliseront) veulent mettre une image sensible, il faut que la définition évoque cette image, à cette condition ils comprendront et retiendront.* »
>
> [POINCARE, 1908]

- ***La forme***

Faciliter la transition Lycée Université, c'est avant tout comme l'affirme [DIEUDONNE, 1968] "fournir à l'étudiant consciencieux la base technique solide qui lui permettra d'assimiler ensuite les conceptions plus abstraites sans tomber dans le psittacisme".

Faciliter la transition Lycée Université, c'est aussi proposer aux étudiants des activités destinées à les convaincre de l'intérêt d'une définition en compréhension ou conjonctive (un carré est un parallélogramme qui a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux) ce type de définition incite au raisonnement déductif en remplacement de la définition en extension ou disjonctive (un quadrilatère, c'est un carré ou un rectangle, ou un losange) qui entraîne plutôt l'esprit au raisonnement inductif.

## La modélisation

- ***Le constat***

Le travail d'un scientifique est le plus souvent de savoir proposer un modèle, censé représenter le monde réel, suffisamment pertinent et simple pour que l'on soit capable d'y faire des calculs permettant des prédictions.

C'est la force de la science que de se donner les moyens de « prévoir l'avenir » et ce doit être le souci du scientifique que de savoir proposer ces modèles mais aussi d'éviter et de dénoncer le charlatanisme. Cependant, ce souci de modélisation est peu présent dans nos enseignements scientifiques, où l'on propose le plus souvent des situations toutes modélisées sans jamais poser le problème : Pourquoi ce modèle ? Qu'est-ce qu'il est censé représenter ?. C'est un premier pas vers la perte de sens et la perte de contrôle du modèle. Le danger est alors que notre enseignement fabrique non pas des scientifiques responsables, mais plutôt des charlatans.

- ***Les objectifs***

Compte tenu des nombreux thèmes retenus pour ce module de méthodologie, on ne peut pas être trop ambitieux sur le thème de la modélisation. Il ne s'agit pas de montrer tous les aspects que comporte la modélisation dans le travail scientifique. Il s'agit plutôt de montrer comment, si l'on se soucie un peu de modélisation, on arrive à mettre où à remettre du sens sur les objets mathématiques que l'on manipule. Il y a deux façons d'envisager l'acte de modélisation.

La première est celle qui paraît la plus évidente et qui consiste à proposer un modèle mathématique à un problème réel. C'est par exemple le rôle de la physique. Les probabilités et statistiques se prêtent bien à ce jeu, par exemple en économie, en biologie ou bien d'autres sujets.

La deuxième façon consiste à l'envisager à l'intérieur des mathématiques. On en donnera quelques exemples dans ce qui suit.

Les règles que l'on s'impose à l'intérieur du jeu mathématique sont déjà un acte de modélisation. Le jeu des définitions consiste à restreindre le champ d'action d'un problème et de pouvoir proposer des preuves de ce même problème à l'intérieur d'un modèle précis [LAKATOS, 1984].

La théorie de l'intégration est un bel exemple de modélisation mathématique de la notion d'aire.

Le monde linéaire est aussi une modélisation des problèmes courbes. Le calcul différentiel répond à ce problème. La linéarisation des problèmes rentre aussi dans ce champ.

Le fait de se restreindre à des fonctions deux fois différentiables en analyse, peut être envisagé comme un acte de modélisation.

Il semble important de montrer que les modèles mathématiques s'ils ont un aspect idéal, ne sont pas pour autant la réalité, ni ce qu'il faut nécessairement faire : Ils sont plus ou moins pertinents. Ils sont très fortement définis, alors que le monde réel l'est peu.

Il faudra essayer d'articuler autant que possible ce thème avec le thème définitions.

- ***La forme***

Les problèmes ouverts sont ici encore de bons moyens pour provoquer l'acte de modélisation, puisqu'il va imposer de définir le lieu où l'on veut résoudre le problème, de définir les objets et le monde où l'on se pose les questions.

On pourra montrer, et on pense qu'il s'agit d'une bonne stratégie pour l'ensemble du module, comment dans un modèle très simple le problème se résout facilement et à mesure qu'on le complique, que l'on envisage d'autres paramètres, il faut repenser les preuves, les stratégies...

## Conjecturer - prouver

- ***Constat***

Qu'il s'agisse de cours, de TD, de recherche d'exercices, de devoirs, l'essentiel de l'activité proposée à un étudiant en mathématiques réside dans la recherche de preuves.

Pour l'enseignant qui doit contrôler à la fois l'acquisition des connaissances et l'acquisition de certaines démarches de preuves, la tentation est grande lors des diverses épreuves d'examen de proposer un questionnement proche de ceux que les étudiants ont déjà rencontrés.

Ce couple "enseignement - évaluation" induit auprès des étudiants certains comportements - recherche d'automatismes, d'algorithmes de traitement - qui les éloignent de l'effet recherché - autonomie, goût de la recherche. On constate que de nombreux étudiants pratiquent les mathématiques "de l'extérieur", leur activité essentielle étant, à partir d'un contexte reconnu, d'appliquer la recette adéquate.

Comment y échapper ?

Deux types de problèmes invitent à prouver [BKOUCHE, 1989] et [GAUD, 1989] :

- Type 1 : problèmes pour lesquels la preuve doit avoir pour **fonction d'expliquer ce qui est vrai.** Il s'agit des problèmes du type "démontrer que" appelés souvent problèmes fermés.
- Type 2 : problèmes pour lesquels la preuve doit **permettre de savoir si le résultat est vrai.** Il s'agit des problèmes du type "que se passe-t-il dans telles conditions" appelés souvent problèmes ouverts.

Ces deux types renvoient à des activités de nature différente de la part de celui qui cherche.

Il est clair que les problèmes de type 1 font référence à la fois à un niveau donné (le niveau d'étude), à un public donné (l'enseignant) et à une forme donnée (celle qui est en vigueur au niveau donné). On peut penser qu'ils ont comme fonction d'aider l'étudiant à bien repérer le contexte du travail effectué à un niveau donné, la forme que doit en prendre l'exposé. Pour cela, les modèles sont dans le cours ou dans les divers corrigés donnés en T.D.

Les problèmes de type 2 invitent avant tout à la recherche du vrai. C'est-à-dire à se convaincre dans un premier temps de l'issue d'une situation que l'on doit examiner, et expliquer dans un deuxième temps pourquoi cette issue est inéluctable. Il est clair que le deuxième temps prend alors l'aspect d'un problème du type 1, mais dans ce cas, la réflexion préalable sur la nature de l'issue va influer sur la forme et le contexte [DOUADY, 1992].

- ***Objectifs***

Rompre avec certaines pratiques des étudiants en leur proposant de s'impliquer plus activement dans leur travail. Pour cela :

1. Mettre les étudiants en situation de recherche de problèmes dont la solution n'est pas connue à l'avance.
2. Mettre en évidence à travers des problèmes ouverts proposés à des groupes d'étudiants :
   - La nécessité d'une démonstration.
   - La multiplicité des formes que peut prendre une démonstration suivant le contexte.

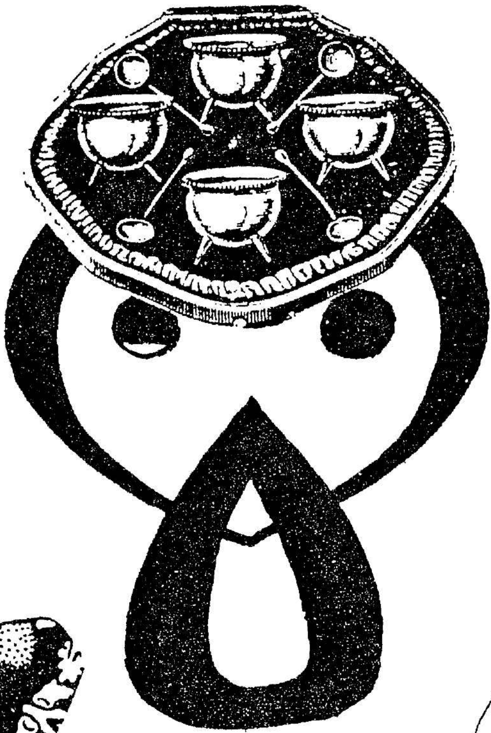
Cela suppose :

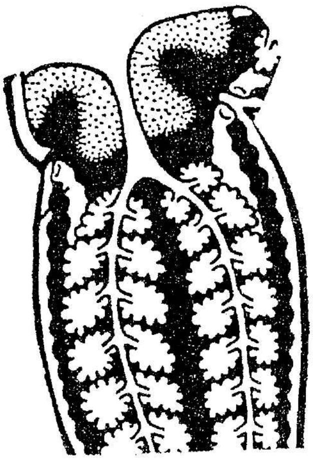
- Que la forme écrite attendue soit la plus proche possible du langage naturel, lisible par un étudiant de même niveau par exemple.
- Qu'à l'issue des travaux il y ait confrontation des diverses approches, un débat sur la validité du travail ainsi que sur la meilleure forme possible en termes d'économie et de précision.

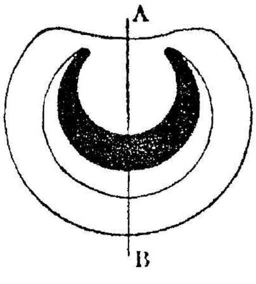
- ***La forme***

Il est important que les travaux proposés se dégagent, au moins au début, des contenus enseignés et que l'évaluation de ces travaux prenne en compte la lisibilité autant que l'exactitude de la solution. Ils pourraient s'apparenter aux "narrations de recherche" de l'enseignement secondaire : décrire la recherche, donner après réflexion sur la recherche une démonstration du résultat [BONAFE, 1993].

Le contrat passé, qui repose sur une confiance réciproque, doit clairement annoncer que le travail attendu sera personnel, que toute intervention extérieure sera mentionnée, y compris le recours à des manuels.






A
B

# V La méthodologie à travers les UFR

Voici quelques approches d'enseignement de la méthodologie réalisées dans d'autres universités.

## UFR Sciences de Strasbourg

Propositions pour un enseignement de la Méthodologie des Mathématiques en DEUG (V. BLANLOEIL, N. BOPP, O. DEBARRE, M. OUNAIES, N. WACH, M. WAMBST, D. WEIL).

- ***Forme***

Activités proposées pour combler le fossé entre terminale et DEUG.

Celles-ci utilisent le plus souvent les notions déjà vues au lycée, dans les domaines les plus variés.

Une réflexion a été menée durant l'année scolaire 1997/1998; les exercices et travaux pratiques ont dû être testés cette année, le travail sera modifié en conséquence.

- ***Contenu***

Les activités portent sur les thèmes suivants :

- Comment travailler un cours et utiliser des livres.
- Le raisonnement en mathématique.
- Résolution de problème (travailler l'enchaînement des idées).
- Index de vocabulaire le plus fréquent.

- ***Destination***

Les enseignants du supérieur.

- ***Moyens***

La question des moyens (mise en œuvre, cadre de travail..) n'est pas abordée.

- ***Bibliographie***

Proposition d'une liste commentée d'ouvrages à destination des étudiants de première et seconde année de DEUG.

## Université de Bordeaux

Module de Mathématiques M2 avec l'unité de méthodologie du travail universitaire.

- ***Forme***

Conformément aux arrêtés du 17 avril et du 8 mai 1997, la méthodologie est intégrée au module de Mathématiques M2, (module de 1$^{ier}$ semestre de « DEUG tronc commun à MIAS et SSM) sous forme de contrat pédagogique expérimenté en 1997/1998.

- ***Objectifs***

Il s'agit de :

- Développer l'aptitude à prendre des initiatives personnelles, l'aptitude au travail collectif, des qualités de communication.
- Maintenir les exigences de formation scientifique telles qu'elles sont prévues dans le programme de M 2.
- Conduire les étudiants vers des démarches scientifiques.
- Développer la curiosité scientifique.
- Aider à la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire pour amener progressivement les étudiants à être autonomes.

- ***Destination***

Les enseignants du supérieur.

- ***Moyens***

Les enseignants s'appuient sur des moyens supplémentaires :

- Aide de tuteurs (étudiants de 2$^{ième}$ cycle ou D.E.A) ;
- Techniques d'auto-formation ou d'auto-évaluation ;
- Interventions dans le travail personnel de l'étudiant.

Une planification détaillée de l'année est jointe, ainsi que la modalité des contrôles des connaissances.

## UFR Sciences de Besançon, DEUG MIAS [1993 à 1998]

Durant 14 semaines et à raison d'une heure et demie par semaine, les étudiants sont répartis par groupes de TP (18 étudiants maximum). A l'intérieur de chaque groupe, ils se répartissent en sous-groupes de deux ou trois étudiants qui auront chacun deux types de travaux de natures différentes à effectuer :

- chercher deux ou trois problèmes de type ouvert,
- réaliser un exposé.

- ***Les problèmes***

Une ou plusieurs séances sont consacrées à l'amorce de la recherche par groupe. L'enseignant n'intervient pas dans cette recherche. Cette recherche sera poursuivie (terminée ou non), et rédigée collectivement sous forme de narration de recherche à l'extérieur.

L'évaluation est collective et se fait au travers du compte-rendu. Elle porte sur sa forme, la variété des méthodes envisagées, l'exactitude des justifications.

*Un exemple de problème*

La population des espèces animales évolue souvent de façon assez surprenante. Des périodes fastes suivies de périodes beaucoup plus sombres. Depuis longtemps les spécialistes en écologie se sont heurtés à ce problème sans parvenir à l'expliquer.

Une modélisation proposée pour l'évolution d'une espèce animale est la suivante : si $x_n$ désigne à l'année $n$ le pourcentage de population de l'espèce considérée par rapport à une population maximale possible, on a $x_{n+1} = r.x_n(1- x_n)$ où $r$ dépend de l'espèce considérée, des conditions climatiques, des ressources en nourriture ...

- Donner une condition sur $r$ pour que ce modèle s'applique à la réalité, c'est-à-dire que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ et tout $x_0$ de $[0 ; 1]$, $x_n$ soit compris entre 0 et 1.

- Soit $r$ vérifiant cette condition. La conjecture que proposaient les premiers écologistes est la suivante : "quelle que soit la donnée initiale $x_0$ la suite $(x_n)$ converge vers un point d'équilibre". Qu'en pensez-vous ? On pourra faire plusieurs essais en donnant différentes valeurs à $r$ et $x_0$.

Vous devez faire un compte-rendu de toutes vos pistes de recherche, même celles qui n'ont pas abouti, expliciter les conjectures que vous aurez pu faire au cours de votre recherche et indiquer tous les résultats que vous aurez pu démontrer (avec leur démonstration).

- ***Les exposés***

Ils peuvent avoir un lien avec les problèmes ouverts proposés, comportent des indications bibliographiques et sont à réaliser à l'extérieur des séances. L'enseignant suit le travail, peut apporter des précisions et demander des modifications.

L'évaluation est individuelle, elle repose sur l'exposé de 45 minutes suivi de question et la version écrite remise.

*Un exemple d'exposé*

Les Grecs avaient remarqué l'incommensurabilité de la diagonale du carré et de son côté. Il est donc nécessaire d'introduire d'autres nombres que les rationnels. Le but de l'exposé est de préciser certaines relations de l'ensemble des réels et celui des rationnels.

1) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2) Montrer qu'entre deux nombres rationnels, il existe un nombre irrationnel.

3) Montrer qu'entre deux nombres irrationnels, il existe un nombre rationnel.

4) Soit la suite (un) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$. Les termes de la suite et sa limite sont-ils rationnels ?

Essayez de donner une présentation d'ensemble à l'exposé.


Bibliographie pour l'exposé :

ARNAUDIES J.M., FRAISSE H., 1988, *Cours de mathématiques 2, Analyse.* Dunod Université, Paris.

GUINOT M., 1992, *Arithmétique pour amateurs Livre 1.* IREM, Aléas éditeur, Lyon.

LEHMANN D., 1984, *Mathématiques pour l'étudiant de première année 2, Analyse.* Belin collection DIA Paris.

DAHAN-DALMEDICO A., PEIFFER J., 1986, *Une histoire des mathématiques.* Seuil collection Points Sciences, Paris.

# VI Exemples de sujets

## Sujet 1 : Notion d'algorithmique

Le terme d'**algorithme** est tiré du nom du mathématicien AL-KHAWARIZMI, qui fut au IX$^{\text{ème}}$ siècle à Bagdad, l'un des fondateurs de l'arithmétique moderne. Ses ouvrages ont permis de transmettre à l'Occident les règles de calculs sur la représentation décimale des nombres.

Un algorithme est une méthode de résolution d'un problème par une succession d'opérations élémentaires obéissant à un enchaînement déterminé.

Divers algorithmes ont été mis au point dès l'Antiquité :

- algorithme de calcul des décimales du nombre $\Pi$ (ARCHIMEDE) ;
- algorithme de calcul du PGCD de deux nombres (EUCLIDE, environ 300 AJ-C).

Plus tard, les problèmes de résolution d'équations algébriques ont conduit à de nombreux algorithmes (méthode de Cardan, algorithme de Newton, méthode d'élimination de GAUSS...). La recherche de solutions d'équations différentielles a apporté son lot d'algorithmes.

L'avènement des calculateurs électroniques a entraîné un renouvellement complet de l'algorithmique :

- Les algorithmes se sont exprimés dans une grammaire synthétique : les langages de programmation.
- La taille des problèmes, c'est-à-dire leurs données et leurs résultats, a considérablement augmenté (on traite des systèmes linéaires de plusieurs milliers d'équations).
- L'efficacité des calculateurs électroniques tend à poser l'algorithme du problème comme un objectif collatéral à la résolution du problème.

On relèvera deux conséquences :

- Les résultats fournis par des algorithmes traités par une machine seront parfois invérifiables « à la main ». (Qui ira vérifier la solution d'un système 1000 x1000 !)
- Les contraintes très lâches sur la taille des problèmes peuvent avoir des conséquences lourdes sur les durées d'exécutions. (On peut lancer un problème sur un nombre à 100 chiffres mais il ne faudrait pas qu'il nécessite 1000 ans pour être traité !)

L'objet de **l'algorithmique** est la construction de programmes, c'est aussi l'évaluation des programmes quant à leur correction et leur efficacité.

Un programme est correct quand son exécution produit, dans un temps fini, le résultat pour lequel il a été construit. Cette problématique conduit à la notion de « démonstrations de programmes ». À cette fin, des formalisations et leurs axiomatiques ont été développées, on peut citer celles de HOARE, de DIJKSTRA.

Grâce à ces formalisations, on peut montrer que {D} P {R}. C'est-à-dire qu'un programme P construit pour donner à partir de {D : données}un résultat {R} fournira exactement ce résultat{R}. On dit qu'on a montré sa *semi-correction.*

Pour montrer sa correction il reste à prouver que le résultat est obtenu dans un temps fini (que le programme ne "boucle pas" par exemple). Cette preuve de finitude ne peut pas être établie de façon formelle pour tout type de programme : la finitude d'un programme est *indécidable*, c'est-à-dire qu'il ne peut pas y avoir un algorithme permettant de décider si un programme s'arrête ou pas. Seule une étude cas par cas des algorithmes permet de savoir si ceux-ci s'exécutent en un temps fini ou non.

L'efficacité d'un programme se mesure par sa *complexité*. On distingue la *complexité pratique* qui est une mesure du temps d'exécution de ce programme et de la taille mémoire nécessaire. Cette mesure est liée, entre autres, à la machine utilisée. On préfère considérer la *complexité théorique* qui s'exprime indépendamment de la machine et par là reste valable à travers les évolutions technologiques. Cette complexité théorique reste liée aux données initiales, ainsi l'efficacité d'un algorithme de tri dépend du désordre initial des données. On définit donc la *complexité théorique maximale* que l'on appellera *complexité* qui est celle obtenue dans le cas le plus défavorable. La notation retenue pour exprimer cette complexité est celle de LANDAU.

Exemple : « L'algorithme de Machin, basé sur la formule du même nom, permet de calculer les décimales successives de $\pi$, c'est un algorithme en $0(n)$ ».

Ceci signifie :

Si, sur une machine donnée, on a mesuré que :

| | | | |
|---|---|---|---|
| pour calculer | 100 décimales | il faut : | 1,2 s |
| Alors pour calculer | 1000 décimales | il faudra | 12 s |
| Alors pour calculer | $10^8$ décimales | il faudra | 1,2 $10^6$ s (env. 14 jours). |

Remarque : On retiendra toute la signification asymptotique de cette notion de complexité : un algorithme en $0(n)$ peut, sur la même machine, être plus lent qu'un algorithme en $0(n^2)$ : les coefficients, les termes résiduels se révèlent pour de "petites" valeurs de n et sont effacés pour de "grandes" valeurs de n. On retiendra tout l'intérêt des algorithmes en $0(\log n)$ tel celui de SALAMIN qui calcule aussi les n premières décimales de $\pi$.

## Exemple de calcul de complexité (1) :

Problème : Pour N donné trouver (x;y) tel que $x \leq y$ et $x^2 + y^2 = N$

Algorithme : N , i , j , racn : ENTIERS

{N est donné; racn, partie entière de $\sqrt{N}$, est donné}

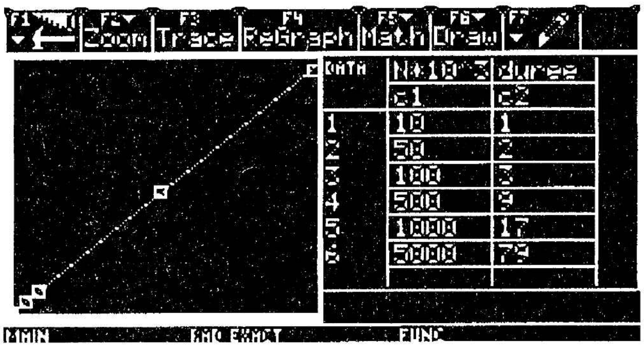
POUR i:=1 JUSQUA racn FAIRE

| POUR j:= i JUSQUA racn FAIRE

| | SI $i^2 + j^2 = N$ ALORS ' solution (i,j)'

Complexité : La boucle "j" est effectuée (racn- i) fois et i va de 1 à racn donc le test est effectué $\frac{(racn+1)racn}{2}$ fois l'algorithme est en $0(N)$ ( $= 0(racn^2)$)

Une expérimentation[9] simple (N en milliers et durée en secondes) donne la représentation ci-contre et l'on constate, en régression linéaire, une corrélation de 0,99995 entre les données.




[9]Turbo Pascal sur Mac, Système 7

## Exemple de calcul de complexité (2) :

Problème : Pour N donné trouver (x;y;z) tel que $x \leq y \leq z$ et $x^2 + y^2 + z^2 = N$

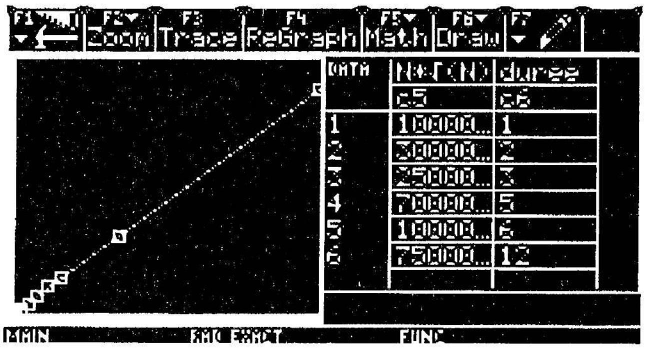
Algorithme : N , i , j , k, racn : ENTIERS

{N est donné; racn, partie entière de $\sqrt{N}$, est donné}

```
POUR i:=1 JUSQUA racn FAIRE
  | POUR j:= i JUSQUA racn FAIRE
  |   | POUR k:= j JUSQUA racn FAIRE
  |   |   | SI  i2 + j2 + k2= N  ALORS  ' solution (i,j,k)'
```

Complexité : La boucle "k" est effectuée (racn- j) fois et j va de i à racn et i de 1 à racn en dénombrant combien de fois le test est fait, il vient $0(N\sqrt{N})$ ( = $0(\text{racn}^3)$)

Une expérimentation du même type que précédemment donne des valeurs pour $N\sqrt{N}$ et la durée correspondante. D'où la représentation ci-contre et l'on constate, en régression linéaire entre durée et $N\sqrt{N}$, une corrélation de 0,99993.




Problème :

1. Etudier, organiser les aspects mathématiques qui sont évoqués ci-dessus.
2. Donner des exemples d'évaluation d'algorithmes et mettre en place une expérimentation qui valide votre modèle.

ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE


BERNARD R. & al, 1999, *Fragments d'arithmétique.* IREM de Montpellier.

MEYER et BAUDOIN, 1984, *Méthodes de programmation.* Eyrolles.

BERLIOUX et BIZARD, 1983, *Construction, preuve et évaluation des programmes.* Dunod.

LIVERCY, 1978, *Théorie des programmes.* Dunod.

ENCYCLOPEDIE UNIVERSALIS : Rubrique algorithmique.

## Sujet 2 : Notions de cryptographie

Science centrée sur la création de codes et les méthodes de décodages d'une information qui peut être visible par tous, mais compréhensible uniquement par un destinataire.

### Principe

Il s'agit de définir une bijection d'un ensemble {A,B,C......}: l'alphabet source qui est l'alphabet naturel éventuellement étendu aux chiffres et à des symboles, vers un alphabet but[10] qui, pour des raisons de discrétion, est en général identique à l'alphabet source

Cette bijection peut être composée avec une application vers un ensemble de nombres. C'est d'ailleurs sur celle-ci qu'interviennent les mathématiques. Les mathématiques interviennent aussi, par des outils statistiques, dans la conception d'algorithmes de décodages "en force".

### Les codes à clé secrète

Il s'agit d'une substitution sur l'alphabet naturel. Vu la finalité de la cryptographie, la définition en extension de cette substitution n'est pas retenue. En pratique, cette définition est faite à travers une **clé** et un découpage en blocs de l'information.

<u>Définition de la substitution</u> :

UNE CLE + UNE LONGUEUR DE BLOCS (parfois intrinsèque à la clé)

<u>Exemple 1</u> : La clé est CALIGULA, ici longueur 6 : C.A.L.I.G.U.
*(on s'arrête à la première lettre répétée)*
Elle définit la substitution : C A L I G U
B D E F H J
*(autres lettres que celles de la clé )* K M N O P Q
R S T V W X
Y Z

D'où : (A,B,C,...) = CBKRYADMSZLRNTIF...
{ici combinaison de bloc + découpage en colonnes}

<u>Exemple 2</u> : longueur 8 puis on numérote :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | A | L | I | G | U | L | A |
| 3 | 1 | 6 | 5 | 4 | 8 | 7 | 2 |

D'où : (1,2,3,4,5,6,7,8) = (3,1,6,5,4,8,7,2)

L'information est alors découpée en blocs de 8, sur chaque bloc on applique $\sigma$ au rang de chaque lettre dans le bloc :

<u>E V E R Δ</u> <u>B A T T E R I E</u> <u>S Δ C A L C U L</u> <u>A T R I C E S Δ</u>
N Δ E V E L R E ......

Pour plus de confidentialité, on peut empiler les méthodes, mais il faut ménager la "portabilité" de la clé. Dans ce type de codage, on trouve D.E.S. (Data Encrypting System) d'IBM.

De nos jours, le "forçage " direct d'un code, avec un ordinateur spécialisé et des algorithmes ad hoc s'appuyant (entre autres) sur des données statistiques et une information sur le champ sémantique du message, nécessite environ une journée.

---

[10] Une telle bijection peut associer à une lettre, un ensemble de symboles : pour brouiller des études statistiques sur le message codé, la lettre A peut être remplacée aléatoirement par $A_1$ ou $A_2$ ...$A_n$

## Le codage R.S.A.

Le codage RSA, dit "codage à clé publique" a trouvé son principe dans les travaux de RIVEST SHAMIR et ADLEMAN (MIT 77). Le principe est d'associer le destinataire du message (message codé visible par tous) avec une clé visible par tous. Mais le forçage direct du message nécessitera un temps de calcul non polynomial [11]

Principe : Soit d'abord $n$ un entier premier donné.

Objectif : x : message clair .........*«codage»*......$x^e$ mod $n$ : message codé

$x^e$ [$n$] : message codé... «décodage»... $(x^e)^d$ mod $n$

On choisit e et d de sorte que $(x^e)^d \equiv x$ [n]

On a pris ici n premier afin que tout y = $x^e$ ait un inverse multiplicatif dans Z[n] autrement dit que tout $x^e$ soit "décodable" par cette méthode.

Exemple : On choisit n = 33 et on va coder le message x = 15, la clé de codage sera "publique" et d'ailleurs on la donne : 7 .

Chercher à décoder, c'est-à-dire, chercher d de sorte que $(15^7)^d \equiv 15$ [33] et vérifier que tout x ( < 33) peut ainsi être codé puis décodé.

Avec le même n ( = 33), la clé est maintenant e = 4, chercher à décoder en déterminant un entier d de sorte que : $(x^4)^d \equiv x$ [33].

On remarquera l'existence de d pour e = 7 et la non-existence de d pour e = 4.

Étant donné n, il faut donc pouvoir décider de l'existence d'une clé de codage $e$ et d'une clé de décodage $d$. Dans la pratique, qui sera précisée plus loin, $e$ sera connue de tous (du codeur en particulier !) mais $e$ ne sera connue que du destinataire du message.

Il faut donc trouver des solutions à « $(x^e)^d \equiv x$ [n] pour tout x (x < n) » les inconnues étant $e$ et $d$ entiers.

$(x^e)^d \equiv x$ [n] <=> $x^{ed - 1} \equiv 1$ [n] . Or d'après la formule d'Euler : $x^{\varphi(n)} \equiv 1$[n] pour tout x strictement positif et n (≥2 ) premiers entre eux. (Dans le cas présent x, le message, ne sera pas nul et on prendra n produit de nombres premiers plus grands que Max (x)) . On a donc comme solution : ed - 1 = φ (n) ou encore : ed = 1 + φ (n) ou encore : ed ≡ 1 [φ (n)].

A priori, φ (n) n'est pas premier (voir l'expression de l'indicatrice d'EULER) et les seuls inversibles dans Z[φ (n)] sont les nombres qui sont premiers avec φ (n). On prendra donc $e$ premier avec φ (n) et $d$ sera son inverse dans l'anneau Z [φ (n)].

On détermine si $e$ est premier avec φ (n) par l'algorithme d'Euclide ; en "dévissant" cet algorithme et en utilisant l'expression a e + b φ (n) = 1 issue du théorème de BEZOUT, on peut calculer $d$ .

[11]Par "temps polynomial" on entend : le temps de calcul sera asymptotiquement une fonction polynôme de la longueur du message. Dans le cas présent, le temps de calcul de l'algorithme le plus performant est équivalent à $\exp\sqrt{\ln n \;\; \ln(\ln n)}$ .Il ne s'agit pas toutefois d'un problème dit NP.

Méthode : Les concepteurs choisissent deux nombres p et q premiers (très grands, souvent en fonction de l'indicatrice d'EULER).

Celle-ci prend une valeur très facile à calculer quand on connaît p et q :

$\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$ mais le calcul de $\varphi(n)$ devient "infaisable" si on ne connaît que n car il faudrait d'abord le factoriser avec ses deux facteurs premiers et ce problème utilise un algorithme très coûteux.

Ensuite les concepteurs affectent à chaque destinataire une clé $e$ qui sera publiée (type annuaire). Cette clé est choisie de sorte que $e$ et $\varphi(n)$ soient premiers entre eux[12] ainsi $e$ sera inversible dans $\mathbb{Z}[\varphi(n)]$.

Les concepteurs donnent confidentiellement à chaque destinataire sa clé de décodage : $d$ définie par $ed \equiv 1\ [\varphi(n)]$. Les nombres premiers p et q, ainsi que $\varphi(n)$, peuvent alors être "enterrés".

*Remarque :* On peut combiner ce système de codage avec un système d'authentification de l'origine du message. Dans ce cas, le réceptionnaire procède comme un concepteur : il construit un nombre n' et donne confidentiellement d' à chaque expéditeur et conserve (non caché) e'.

Problème : Etudier les aspects mathématiques qui sont évoqués ci-dessus.

Mettre en œuvre, le plus complètement possible, un exemple de codage RSA.

Les théorèmes qui sont mis en oeuvre :

Théorème de FERMAT :

> Quel que soit l'entier naturel a et l'entier premier p on aura : $a^p \equiv a\ [p]$

Indicatrice d'EULER :

> *Le nombre de nombres premiers avec n et inférieur à n est $\varphi(n)$*
>
> *{ Le nombre d'inversibles de Z[n] est $\varphi(n)$ }*
>
> $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$ *où* $n = p_1^{a1} p_2^{a2} \ldots p_r^{ar}$

Formule D'EULER :

> *x est un entier strictement positif et n un entier supérieur à 2 avec x et n premiers entre eux alors $x^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$.*

ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE


BERNARD R. & al, 1999, *Fragments d'arithmétique.* IREM de Montpellier.

BECKETT B., 1990, *Introduction aux méthodes de la Cryptologie.* Masson.

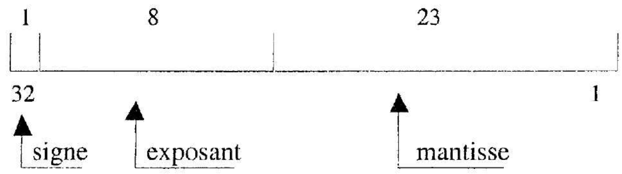
KRANAKIS E., 1986, *Primality and Cryptography.* Johnwiley.


[12] La clé e sera elle aussi un nombre premier avec n dès que le nombre e (< $\varphi(n)$) est choisi plus petit que Inf{p;q} Ce qui est le cas puisque p est q sont des nombres qui, en pratique, sont formés d'au moins une centaine de chiffres.

## Sujet 3 : Nombres et fonctions dans une calculatrice

### La représentation des nombres

La représentation des nombres réels dans un ordinateur s'appuie sur un codage binaire. Il existe plusieurs formats, on peut citer le standard IEEE utilisé par le langage PASCAL où un réel x est représenté sur quatre octets selon le schéma :




et on a $x = (-1)^{signe} \times 2^{(exposant\ -127)} \times (1.mantisse)$

Exemple : (0/1) 01110111 00000000000000100000011
signe exposant mantisse {3/BB800103}

représente : +1,0117875

D'autres formats existent utilisant 8, 16 octets permettant une plus grande précision. Certains programmes implémentent des représentations de réels avec la précision souhaitée par l'utilisateur (*Dérive*).

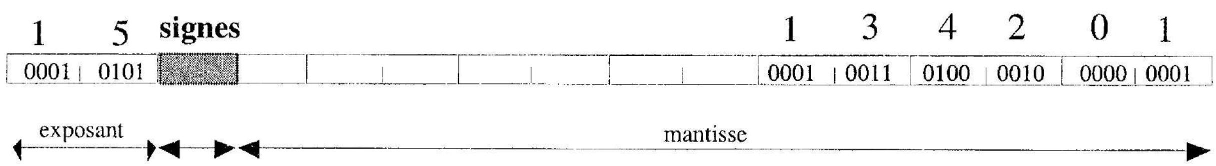
En fait, les processeurs actuels sont câblés pour optimiser ces transformations d'écriture.

Dans les calculatrices, les processeurs sont beaucoup plus rudimentaires aussi pour optimiser le codage interne des réels on utilise un codage DCB ( Décimal Codé Binaire ) :

après une mise sous forme "scientifique" : signe / mantisse [[1;10[ / exposant de 10 chaque chiffre est codé sur quatre bits.

Exemple : pour les TI 81 les nombres sont représentés sur 8 octets :

$1.\ 34201\ 10^{-15}$




Ce qui nous donne 13 chiffres significatifs et une plage d'exposants allant de -99 à 99.

Cette représentation n'est certes pas optimale au sens des théories de l'information, mais le codage est nettement plus immédiat que celui exposé plus haut et est donc mieux adapté aux processeurs plus rudimentaires des calculatrices.

## La fonction ln dans une calculatrice

Il n'est pas concevable de stocker une table (évaluation $\approx$ 8 octets/nombres $\times$ 900 000 = 7200000, soit 7 mégaoctets , certes optimisable !).

On pourrait utiliser le développement en série de $\ln(1 + t)$ :

- d'abord, écrire x sous forme $t \times 2^n$ avec $t \in [1 ; 2[$ et stocker uniquement ln 2,
- ensuite, faire "tourner" un algorithme n'utilisant que les opérations simples (+, -, x, ÷).

Mais la convergence de cette série est très lente.

On préfère, utilisant la représentation DCB, écrire ln t = ln (mantisse) + exposant ln 10 et stocker (en mémoire morte) ln 10 ainsi que la suite $(\ln a_n)$ avec $(a_n)$ définie comme suit :

$$a_n = 1 + 10^{-n} \ (n \geq 0) \text{ d'où : } a_0 = 2 \ ; \ a_1 = 1{,}1 \ ; \ a_2 = 1{,}01 \ldots \text{ (converge vers 1).}$$

On pose alors $x_0 = x\, a_0^{\,n0}$, avec $n_0$ tel que $x_0\, a_0 > 10$ *{autrement dit on multiplie x par $a_0$ jusqu'à atteindre 10 sans le dépasser}.*

On définit alors : $x_k = x_{k-1}\, a_k^{\,nk}$ , avec $n_k$ tel que $x_k\, a_k > 10$

On a alors : $x_k = x\, a_0^{\,n0} \ldots\, a_k^{\,nk}$

Vu l'encadrement des $x_k$, cette suite $(x_k)$ converge vers 10, d'où (vu les propriétés de continuité de ln) on a : $10 = \ln x + \sum_i n_i \ln a_i$.

Cette convergence est très rapide, aussi on peut se contenter d'une table contenant ln 10 ainsi que $\ln a_i$ pour i = 0 … 6.

La fonction log se calcule à partir de $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

## La fonction exponentielle et les fonctions associées

Tout d'abord, on écrit x sous la forme $x = x' + n \ln 10$ puis, on calcule $e^{x'}$.

Pour le calcul de $e^{x'}$ :

- on pose : $x_0 = x' - n_0 \ln a_0$ avec $x_0 \geq 0$ et $x_0 - \ln a_0 < 0$

*(on soustrait autant que possible tant que le résultat reste positif, sorte de division euclidienne, les ln $a_k$ sont stockés en ROM et sont les mêmes que ceux utilisés pour ln)*

- puis : $x_1 = x_0 - n_1 \ln a_1$ à $x_0$ avec $x_1 \geq 0$ et $x_1 - \ln a_1 < 0$
- en itérant, on définit ainsi $(x_k)$ et on a :

$$x_k = x' - n_0 \ln a_0 - n_1 \ln a_1 - \ldots n_k \ln a_k$$

On a ainsi : $x' - n_0 \ln a_0 - n_1 \ln a_1 - \ldots = 0$,

d'où : $\exp(x') = \prod_{i=0}^{+\infty} a_i^{\,ni}$ et $\exp(x) = \prod_{i=0}^{+\infty} a_i^{\,ni} \times 10^n$

Le fonctionnement de la touche $y^x$ s'appuie sur la formule : $a^x = e^{x \ln a}$.

## Les fonctions trigonométriques

L'unité utilisée lors des algorithmes est le radian. La machine a en mémoire $\pi$ et $180/\pi$ pour implémenter les conversions d'unités. Les fonctions sin et cos sont calculées à partir de la fonction tan (par les formules : $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ et $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$).

Les calculs sont faits dans le premier cadran, quelques simples tests permettant de préciser le signe de la ligne trigonométrique calculée.

L'algorithme de calcul de tan x ne s'appuie pas sur un développement limité mais sur une méthode d'approximations successives utilisant ici aussi une table de constantes prédéfinies et stockées en mémoire morte. Ces constantes sont :

$a_0 =$ Arctan $10^0$ $= \pi/4$ ($\approx$ 0,785 398 163 397 450 )

$a_1 =$ Arctan $10^{-1}$

$a_2 =$ Arctan $10^{-2}$

..................

$a_n =$ Arctan $10^{-n}$

En pratique, les valeurs $a_0$ ... $a_5$ sont suffisantes pour obtenir la précision usuelle des calculatrices.

Pour calculer tan x avec x dans le premier cadran, on développe x sous la forme :

$x = q_0\, a_0 + q_1\, a_1 + \ldots + q_k\, a_k + \ldots$ par des "divisions euclidiennes" successives de x par $a_0$ ; $a_1$ puis $a_2$ ... On définit alors une suite dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = A_n^{\,q_n} v_n \\ v_0 = (1;0) \end{cases} \quad \text{avec} \quad A_n = \begin{bmatrix} 1 & -10^{-n} \\ 10^{-n} & 1 \end{bmatrix}$$

soit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10^{-n} \\ 10^{-n} & 1 \end{bmatrix}^{q_n} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}$$

On a alors : $\mathrm{Lim} \frac{Y_n}{X_n} = \tan x$.

On a en effet une suite $\tan(\frac{Y_n}{X_n})$ qui est de Cauchy : $\tan(\frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}) - \tan(\frac{Y_n}{X_n}) = 10^{-n}$.

En notation complexe ($A_n$ est un complexe de module $\sqrt{1+10^{-2n}}$ et d'argument $a_n$ ; $Z = X + iY$ et $z_n = X_n + iY_n$ ) on a le produit infini :

$Z = \prod_{i=0} z_i^{q_i}$ ce qui donne quant aux arguments : $\arg(Z) = q_0\, a_0 + q_1\, a_1 + \ldots + q_k\, a_k + \ldots = x$

Géométriquement, on transforme le point I d'affixe 1, par des similitudes centrées à l'origine et d'angles ai ; le point M d'affixe Z est la limite de la suite de points obtenus par compositions de ces similitudes.

Problème :

Etudier les aspects mathématiques qui sont évoqués ci-dessus.

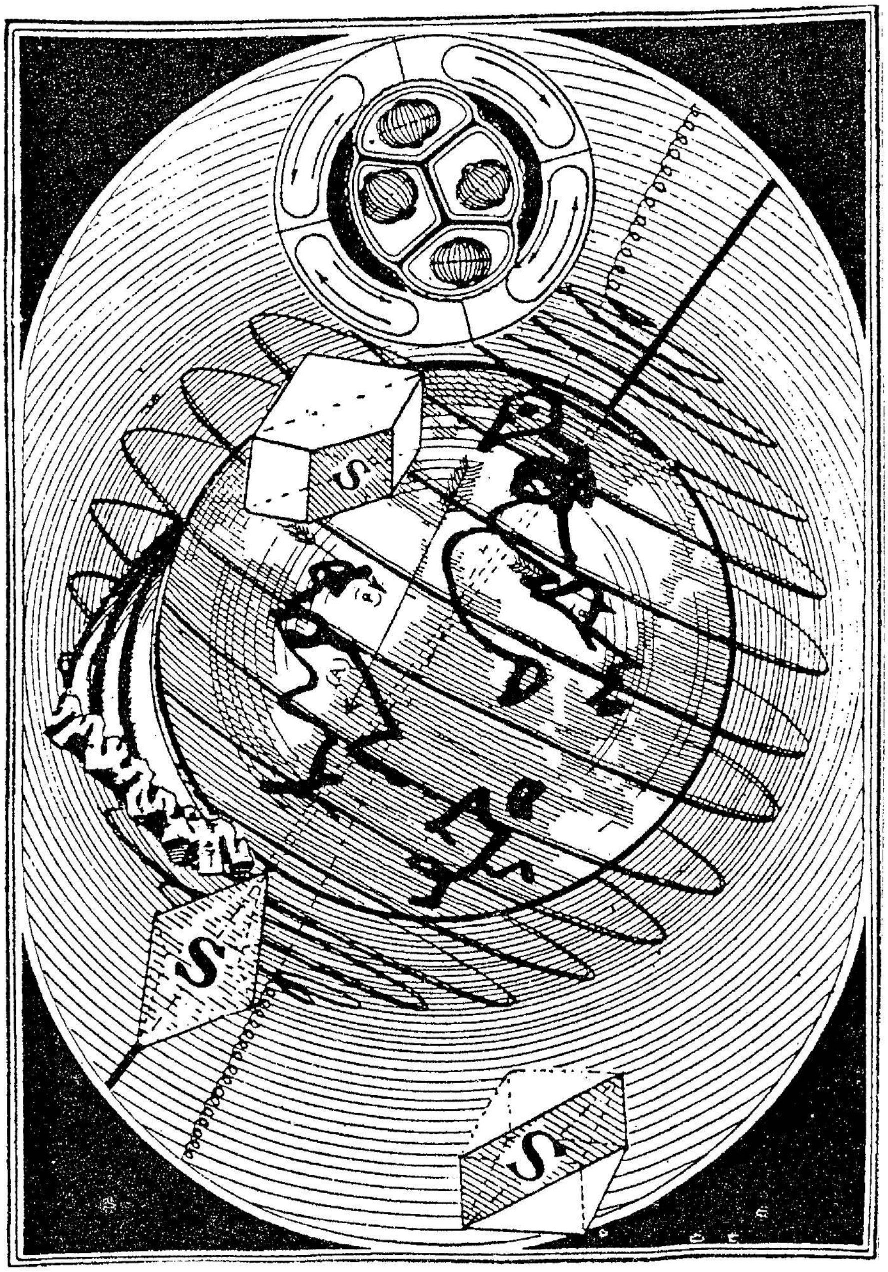
Prolonger cette étude à d'autre représentations de nombres et à d'autres algorithmes.

ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE


BERNARD R. & al, 1998, *Pour une prise en compte des calculatrices symboliques en analyse au lycée.* IREM de Montpellier.`

LE NOUVEL ARCHIMEDE, 1986, n°10 d'octobre.

DIMATHEME, 1982, *Mathématiques 1e SE.* Didier.

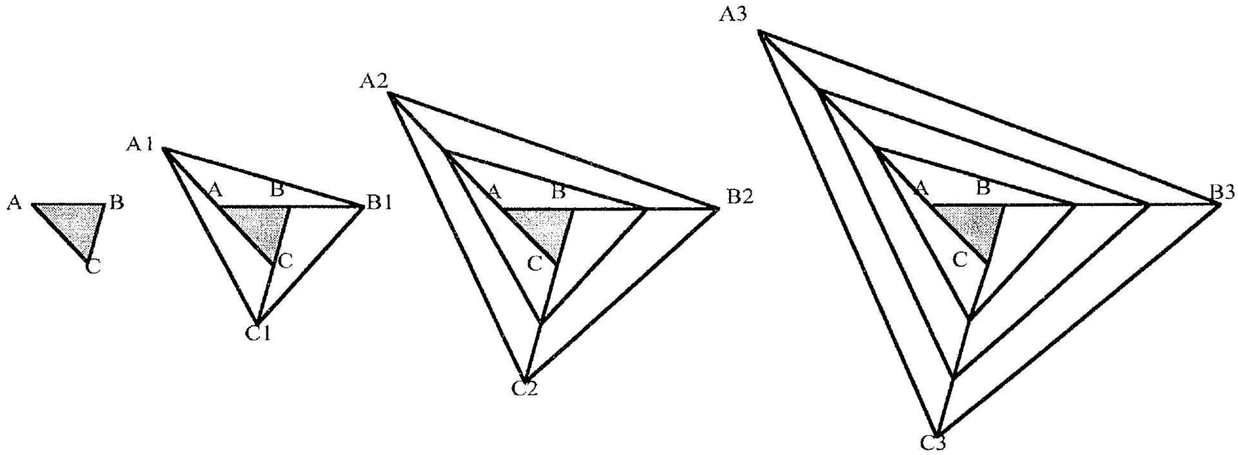



## Sujet 4 : Algorithme de construction de figures.

Problème :

A partir du triangle ABC ci-dessous, on construit les triangles A1B1C1, puis A2B2C2, ... jusqu'à AnBnCn.

Pour cela, on reporte les longueurs AB sur la demi-droite (AB) d'origine A à partir de B, BC sur la demi-droite (BC) d'origine B à partir de C, CA sur la demi-droite (CA) d'origine C à partir de A, toujours dans le même sens, d'abord 1 fois, puis 2 fois, 3 fois ... jusqu'à n fois, pour $n \in \mathbb{N}^*$.




1. Evaluer les aires des triangles A1B1C1, puis A2B2C2, A3B3C3, ... AnBnCn, en fonction de l'aire du triangle initial ABC.
2. Reprendre la question 1 non pas à partir d'un triangle ABC, mais d'un carré ABCD, puis plus généralement d'un polygone régulier convexe ayant p côtés, $p \geq 3$.
3. Le résultat général reste-t-il vrai lorsque le polygone convexe n'est plus régulier ?

Eléments de dialogue :

*Sur la question 1 :*
Nécessité de la validation d'une formule, le raisonnement inductif ici ne suffit pas. Faut-il pour autant un raisonnement par récurrence ?

*Sur la question 2 :*
Au-delà du type de raisonnement qui peut être le même qu'en question 1, seulement pour certains polygones, s'interroger sur la similitude des figures obtenues par construction.

*Sur la question 3 :*
L'affinité règle le cas du triangle. On peut montrer que le résultat reste vrai pour le quadrilatère. Pour les autres, penser à l'utilisation d'un contre-exemple.

## Sujet 5 : Longueurs rationnelles et aires irrationnelles

Problème :

1. Construire un triangle tel que les longueurs de ses côtés soient irrationnelles et son aire non nulle et rationnelle.
2. Déterminer un ensemble fini de $n$ points du plan ($n$>3) tels que la distance de deux d'entre eux soit irrationnelle et que chaque triplet détermine un triangle d'aire non nulle et rationnelle.
3. Déterminer un ensemble infini de $n$ points du plan( $n$>3) tels que la distance de deux d'entre eux soit irrationnelle et que chaque triplet détermine un triangle d'aire non nulle et rationnelle.

Eléments de dialogue :

*Sur la question 1* :

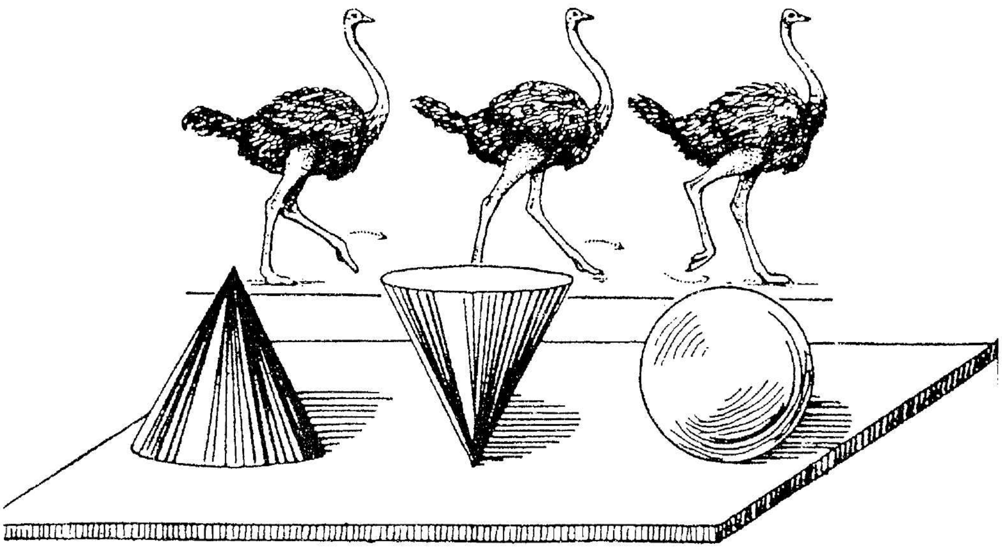
Il peut s'agir d'une exploration libre, via la formule de Héron ou autre...

*Sur la question 2 :*

Si ce n'est pas déjà le cas, il faut orienter la recherche vers un travail sur un réseau à maille carrée où les points auront des coordonnées entières. Le glissement d'un point sur une parallèle à la droite joignant les deux autres offre de multiples possibilités à exploiter.

*Sur la question 3 :*

On peut introduire la fonctionnalité entre abscisse et ordonnée d'un point. Un point ayant comme coordonnées ($n$, $f(n)$), la distance et l'aire s'expriment alors à l'aide du produit scalaire et du déterminant de deux vecteurs. La recherche de conditions nécessaires et (ou) suffisantes sur ces deux nombres et la fonction $f$ constitueront alors l'essentiel du travail.



## Sujet 6 : Autour du cercle

Problème 1 :

Pour un cercle de rayon R, le périmètre est donné par $\mathbb{P} = 2\,\pi\,R$,

l'aire est donnée par $\mathcal{A} = \pi\,R^2$.

Quel rapport y a-t-il entre ces deux « π » ?

Problème 2 :

*Inégalités isopérimétriques*

Soit une courbe fermée de périmètre P donné.

Quelle est celle d'aire maximale ?

On envisagera successivement les cas suivants :

- La courbe est un triangle.
- La courbe est un quadrilatère.
- La courbe est un polygone.
- La courbe est une courbe fermée.

Objectifs :

*Dans le problème 1* :

Modélisation par intégrale et définition du périmètre et de l'aire.

Notion de preuve (ici le résultat est connu depuis longtemps et presque jamais prouvé).

*Dans le problème 2 :*

Définition de courbe fermée

Logique : Quel est le sens de « celle d'aire maximale » ?

On peut aussi poser le problème de l'existence et de l'unicité :

Existe-t-il un polygone d'aire maximale ?

Ouvertures possibles :

Le Problème 2 est assez riche et consistant.

On peut ouvrir le problème 1 sur les questions suivantes :

1. On remarque que dans le cas du cercle, la formule du périmètre est la dérivée de la formule de l'aire. Peut-on prouver ce fait ? Existe-t-il d'autres courbes dont l'aire et le périmètre sont reliés par une formule analogue ?
2. Quel est, parmi les polygones circonscrits à un cercle donné, celui qui a la plus petite aire ?

## Sujet 7 : Empilement de cercles et de sphères

Problème 1 :

On souhaite placer des points dans un disque de rayon R, de sorte que leurs distances respectives soient toujours supérieures ou égales à 2 et qu'il y en ait toujours un au centre.

1. a) Quel est le rayon minimum permettant de placer 2 points ?
   b. Pour ce rayon là, combien peut-on placer de points.
2. Combien peut-on placer de points lorsque R vaut 2, 3 ou 4 ?
3. Peut-on déterminer, en fonction de R, le nombre maximum de points que l'on peut placer ?

Problème 2 :

Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des distances qui sont déterminées par n points dans le plan.

1. Peut-on déterminer le nombre de distances différentes ?
2. Combien de fois la distance minimale peut-elle apparaître ?
3. Combien de fois la distance maximale peut-elle apparaître ?

Objectifs :

L'aspect expérimental de ces deux problèmes facilite la formulation de conjectures.
La difficulté sera dans l'élaboration des preuves.

Ouvertures possibles :

1. Formuler le Problème 1 en termes d'empilement de cercles.
2. Problème de densité de l'empilement (jolie question de modélisation).
3. Cas de l'empilement des sphères (Problème de KEPLER).
4. Problème des réseaux denses.
5. Chaînes de STEINER.
6. Points à distances mutuelles entières.

## Sujet 8 : Pendule simple

Problème :

L'équation du pendule simple est « $\ddot{\theta} = \sin\theta$ ».

Plusieurs questions naturelles peuvent se poser et sont sources de développements intéressants :

1. Périodicité des solutions : quelle période ?
2. Approximation des petites oscillations.
   Qu'est-ce qu'on approche et sur quel domaine, avec quelle confiance ?
3. Problème de l'isochronisme : isochronisme des petites oscillations.
   Quelle confiance accorder à cette approximation ?
4. Qu'est-ce qu'une courbe brachystochrone ?
5. Qu'est-ce qu'une courbe tautochrone ?

Objectifs :

1. Linéarisation d'une équation différentielle. Qu'apporte le modèle linéaire ?
   Quel contrôle obtient-on ?
2. Courbes paramétrées.
3. Intégrales, linéarisation dans une intégrale.
4. Approximation des fonctions.

Ouvertures :

1. Champs de vecteurs.
2. Méthode d'EULER pour le calcul des solutions approchées d'équations différentielles.
3. Études qualitatives.

## Autres pistes

### Approximation des fonctions

1. Calcul des fonctions usuelles.
2. Approximations polynomiales.
3. Utilité de ces démarches?

### Représentation des nombres

1. Nombres entiers, rationnels, réels.
2. Approximation de nombres réels.
3. Fractions continues.
4. Représentations, en informatique, des réels.

## BIBLIOGRAPHIE

ARNAUDIES J.-M., FRAISSE H., 1998, *Cours de mathématiques 2, Analyse.* Dunod Université. Paris.

BASCOU N., BONAFE F., BRUNET R., PELOUZET B., 1993, *Enseignement modulaire en seconde, fascicule 2. Quatre fonctions de l'enseignement modulaire.* IREM de Montpellier. Université Montpellier 2.

BECKETT B., 1990, *Introduction aux méthodes de la Cryptologie.* Masson.

BERLIOUX, BIZARD, 1983, *Construction, preuve et évaluation des programmes.* Dunod.

BKOUCHE R., 1988, *De la démonstration.* Actes du colloque Inter-IREM Géométrie , Mèze mai 1988. IREM de Montpellier. Université Montpellier 2.

BONAFE F., 1993, *Les narrations de recherche.* Repères-IREM n°12. Topiques Editions.

BOURBAKI N., 1939, *Eléments de mathématiques 1, Théorie des ensembles.* Hermann.

CIIU (Commission inter-IREM Université), *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année.* IREM de Lille.

CONDAMINE M., 1996, *Langage, logique, démonstrations... et vérité mathématique.* Aguer Delagrave.

DAHAN-DALMEDICO A., PEIFFER J.,1986, *Une histoire des mathématiques.* Seuil collection. Points Sciences, Paris.

DENNING D., 1983, *Cryptography and Data Security.* Addison-Wesley.

DESCARTES R., *Discours sur la méthode.*

DIEUDONNE J., 1968, *Calcul infinitésimal.* Hermann.

DOUADY R., 1992, *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement.* Repères-IREM n°6. Topiques Editions.

ENCYCLOPEDIE UNIVERSIALIS, *Rubrique algorithmique.*

GAUD D., 1988, *Les deux fonctions de la démonstration.* Actes du colloque Inter-IREM Géométrie, Mèze mai 1988. IREM de Montpellier. Université Montpellier 2.

GUINOT M.,1992, *Arithmétique pour amateurs, Livre 1.* IREM, Aléas éditeur, Lyon.

KAHN D., 1966, *The Codebreakers.* Weidenfeld And Nicholson.

KATZMAN H., 1977, *The Standard Data Encryption Algorithm.* Petrocelli.

KRANAKIS E., 1986, *Primality and Cryptography.* Johnwiley.

LAKATOS I., 1984, *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique.* Hermann.

LEGRAND M., 1990, *Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode.* In [CIIU, 1990].

LEHMANN E., 1984, *Mathématiques pour l'étudiant de première année 2, Analyse.* Belin collection DIA, Paris.

LEMAIRE G., 1904, *Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de géométrie.* Vuibert.

LIVERCY, 1978, *Théorie des programmes.* Dunod.

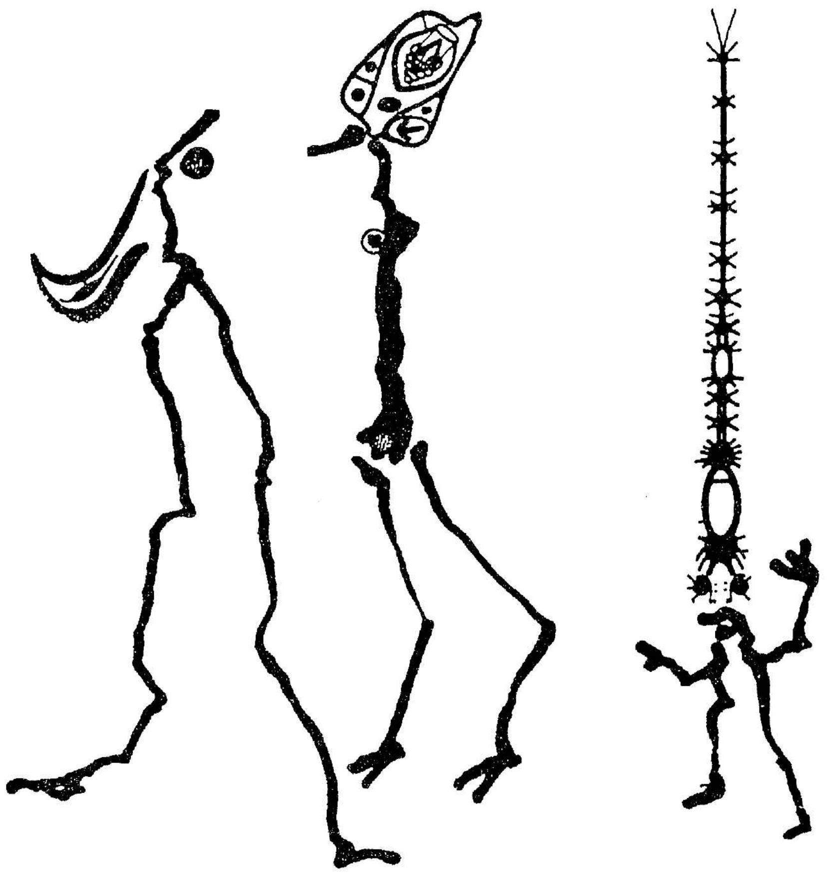
MEYER, BAUDOIN, 1984, *Méthodes de programmation.* Eyrolles.

NOIRFALISE R.,1999, *Arithmétique et Cryptographie.* IREM-Repères n°37. Topiques Editions.

POINCARE H., 1908, *Science et méthode.* Flammarion.

POLYA G., 1965, *Comment poser et résoudre un problème.* Dunod.

ROGALSKI M., 1990, *Enseigner des méthodes en mathématiques.* In [CIIU, 1990].



Illustrations de Max ERNST, extraites de *Logique sans peine* (recueil de textes de Lewis CARROLL, édités en 1982 par Hermann).

## Publicité

On pourra trouver des réflexions sur les questions de méthode ou des idées pour la mise en place des unités de méthodologie dans les différentes publications de l'IREM, en particulier dans :

## La revue nationale des IREM (Repères-IREM) :

On pourra se reporter au numéro 16 (juillet 1994), sur les méthodes, au numéro 36 (juillet 1999), consacré à la modélisation et au numéro 38 (janvier 2000), qui pose les questions : "que faut-il enseigner en mathématiques, pour qui, pour quoi ?" mais aussi à de nombreux autres articles, dont :

Groupe AHA (université de Louvain-La-Neuve), 1996, *Une approche heuristique de l'analyse*. Repères-IREM n°25, pp. 35-62.

LEGRAND Marc, 1997, *La problématique des situations fondamentales*. Repères-IREM n°27, pp. 81-127.

SAUTER Mireille, 1998, *Narrations de recherche, une nouvelle pratique pédagogique*. Repères-IREM n°30, pp. 9-22.

FRIEDELMEYER Jean-Pierre, 1998, *Les aires : outil heuristique, outil démonstratif*. Repères-IREM n°31, pp. 39-62.

CHRÉTIEN Claude et GAUD Christian, 1998, *Qu'est-ce que le hasard, comment le mathématiser ?*. Repères-IREM n°32, pp. 81-110.

DOUADY Adrien, 1999, *Géométrie dans les espaces de paramètres, une méthode de géométrisation*. Repères-IREM n°35, pp. 71-90.

LOMBARD Philippe, 1999, *Figures et géométrie : la tentation du sens ?...* Repères-IREM n°37, pp. 71-106.

BKOUCHE Rudolph, 2000, *Sur la perspective historique dans l'enseignement d'une science*. Repères-IREM n°39, pp. 35-59.

## Les publications du réseau national des IREM

Commission Inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques, 1989, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Besançon.

Commission inter-IREM Histoire et épistémologie des mathématiques, 1991, *La figure et l'espace*, IREM de Lyon.

Commission inter-IREM Statistique et probabilités, 1997, Enseigner les probabilités au lycée, ouvertures statistiques, enjeux épistémologiques, questions didactiques et idées d'activités, IREM de Reims.

## Les publications de l'IREM de Montpellier

ACTES de la première université d'été européenne sur l'histoire et l'épistémologie des mathématiques, 1993.

TROUCHE Luc et les élèves d'une classe de terminale S, 1998, *Expérimenter et prouver, 38 variations sur un thème imposé*.

POITEVINEAU Yves, 1998, *Faire des graphiques avec Mathematica*.

JABOEUF François et al, 1999, *Histoire de constructions* (à propos des logarithmes et autres fonctions).

BERNARD René et al, 1999, *Fragments d'arithmétique*.

Tous ces documents peuvent être consultés à la bibliothèque de l'IREM. On peut aussi consulter le site de l'IREM : http://www.irem.univ-montp2.fr

**TITRE**
Les unités de méthodologie en DEUG

**AUTEURS**
BELHAJ Dalila, BONAFE Freddy, FAURE Christian, GANNOUN Ali, KIEFFER Françoise, SABY Nicolas, TISSERON Christiane

**DATE**
Décembre 2000

**EDITEUR**
IREM de Montpellier

**MOTS CLES**
METHODE - METHODOLOGIE - DEUG - TPE

**RESUME**
Cette brochure contient les propositions de l'équipe IREM "Liaison lycée-université" pour un renouvellement de l'enseignement en DEUG. Ce renouvellement s'inscrit dans la mise en place de la réforme des premiers cycles universitaires, à la rentrée 2000 à Montpellier 2.
La réflexion porte principalement sur les questions de méthodologie :

- Faut-il enseigner des méthodes en mathématiques ?
- Quel type de méthode et comment ?

Les propositions de renouvellement s'accompagnent d'idées d'activités sous forme de TPE (Travaux Pratiques Encadrés).

**OUTILS**
CALCULATRICES - CALCULATRICES SYMBOLIQUES - TURBOPASCAL.

**NOMBRE DE PAGES**
49

**ISBN**
2-909916-40-5