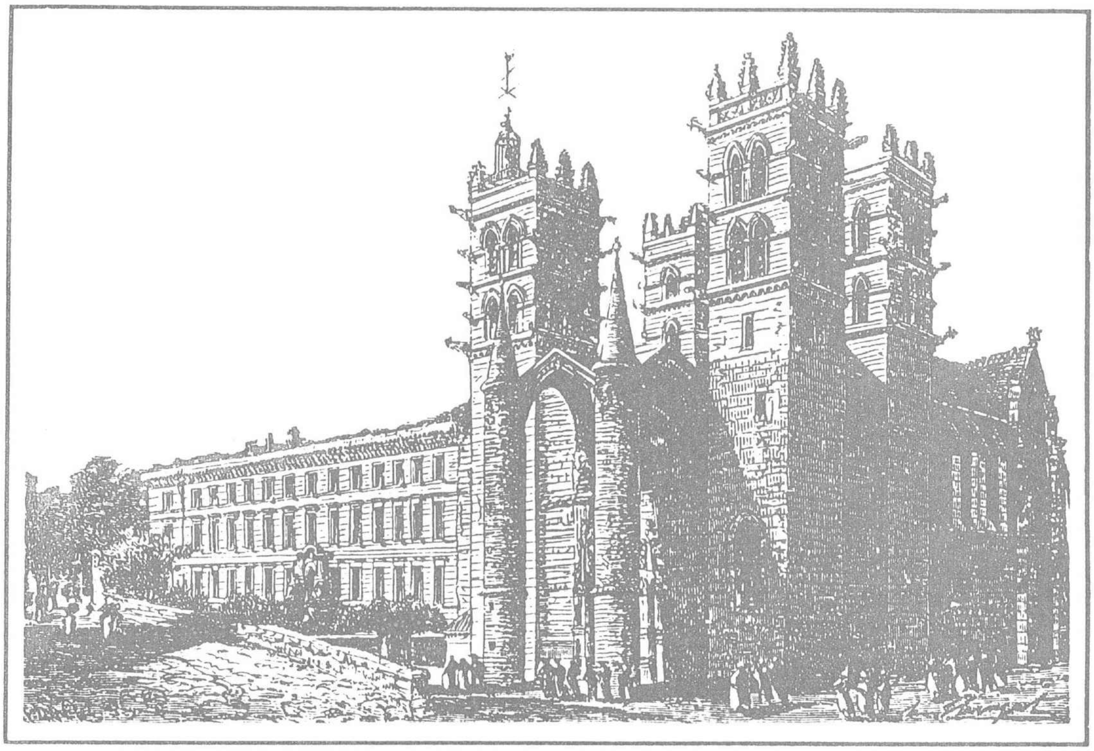
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Université Montpellier II

LES MATHS EN PRATIQUE



POUR MIEUX CONNAITRE LES DECIMAUX

Compte-rendu d'une suite de séances dans une classe

Groupe didactique

JANVIER 1999

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Université Montpellier II

LES MATHS EN PRATIQUE

POUR MIEUX CONNAITRE LES DECIMAUX

Compte-rendu d'une suite de séances dans une classe

Membres du groupe didactique :

Mme Nicole BELLARD
M. Alain BRONNER
N. M. Yves GIRMENS
Mme Mirène LARGUIER
Mme Martine LEWILLION
Mme Elisabeth REBILLARD
Mme Sylvie PELLEQUER
M. Michel SECO
Mme Claudine VERGNE

JANVIER 1999

Ce travail a été réalisé avec des moyens attribués par la MAFPEN, la DLC, la DE.

AVANT PROPOS

Chronique commentée d'une suite d'activités effectivement réalisées dans une classe de CM2, ce document s'adresse tout d'abord aux enseignants des classes de CM et de 6ème, dans lesquelles les nombres décimaux font l'objet d'un apprentissage fondamental .
Ils y trouveront des résultats exploitables, mais aussi la description fidèle des difficultés rencontrées .
Les formateurs des professeurs des écoles ainsi que les animateurs de stage de liaison CM-6ème pourront exercer, sur de nombreux points concernant aussi bien le contenu des activités que les compte-rendus des procédures des élèves, une critique constructive.
L'équipe de didactique de l'IREM de Montpellier est évidemment disponible pour répondre à toute demande d'informations concernant le document et serait ravie si, sur sa base, des collègues voulaient établir un échange .

Nous voulons déjà remercier nos amis Jacqueline Borréani de l'IREM de Rouen, Marie-Claire Jollivet de l'Irem de Poitiers et Jean Claude Aubertin de l'IREM de Besançon pour la lecture qu'ils ont faite du document avant sa forme définitive, laquelle, insuffisamment c'est sûr, a tenu compte de leurs remarques averties.

I. INTRODUCTION

La position des auteurs :

Le contenu de ce fascicule est une suite de cinq séances de mathématiques qui se sont déroulées dans un CM2 de l'école Albert Camus d' Agde.

L'équipe de "Didactique des Mathématiques" de l'Irem de Montpellier qui a élaboré ce document, s'efforce dans les nombreux stages qu'elle anime de présenter aux collègues des situations effectivement réalisées en classe.

Ces travaux ne veulent en aucun cas servir d'exemple, ils ont pour seule ambition de montrer qu'il est possible de mettre en oeuvre quelques idées et certains résultats de la recherche sur l'enseignement des mathématiques.

De ce point de vue nous adhérons à la déclaration, largement partagée à l'heure actuelle, que : "faire des mathématiques c'est avant tout résoudre des problèmes ». Le but premier de ce travail est de montrer qu'il est possible, dès l'école primaire, d'entrer dans cette démarche. Nous avons pour cela utilisé, en particulier, les travaux des chercheurs en didactique des mathématiques référenciés dans la bibliographie.

La problématique :

Les élèves de la classe dans laquelle s'est déroulé l'enseignement ont de bonnes connaissances sur les nombres décimaux ; ils maîtrisent l'ordre et les opérations d'addition et de soustraction des décimaux, ainsi que de multiplication et de division par de petits nombres entiers qu'ils rencontrent dans les problèmes, de type arithmétique, courants à ce niveau. Les élèves savent passer indifféremment d'une écriture fraction décimale à une écriture à virgule.

Bien qu'ils aient été introduits par le besoin de mesurer des longueurs avec une unité quelconque à l'aide des fractions décimales, les décimaux ont été rapidement considérés comme des objets avec lesquels il fallait acquérir des techniques de traitement, ce qui peut faire perdre de vue le sens et l'utilité des nombres décimaux.

Nous avons alors voulu proposer aux élèves un problème pour lequel les nombres décimaux non entiers seraient envisagés, de leur initiative, comme une réponse adéquate à ce problème : il s'agit de la recherche des dimensions de rectangles de périmètre donné.

Les élèves ont travaillé la notion de périmètre du point de vue géométrique et ont mesuré les périmètres de différentes figures, ils disposent des formules habituelles de calcul du périmètre du rectangle. Des nombres décimaux ont été rencontrés dans ces circonstances. Nous voulons que le problème soit l'occasion pour les élèves de construire l'interaction entre l'existence d'une infinité de rectangles de périmètre donné et l'infinité des nombres décimaux qui mesurent les côtés.

Ce problème doit permettre aux élèves l'enrichissement réciproque des connaissances entre les objets géométriques et les nombres. En outre, comme l'élève a rarement l'initiative du choix des nombres pour résoudre un problème, ceux-ci lui apparaissent comme appartenant à des mondes séparés : les entiers, les décimaux non entiers, les fractions. Le problème est alors l'occasion de donner une unité à l'ensemble des nombres connus.

II. SOMMAIRE DES SITUATION-PROBLEMES

SITUATION-I
Rectangles de même périmètre.

Pages 6-7-8-9-9-10

Objectifs:
- *Investir l'ensemble des nombres décimaux non entiers .*
- *Mettre en place des stratégies de recherche de solutions.*
- *Rechercher une stratégie optimale.*

SITUATION-II
Représentation graphique des solutions par des points dans un repère.

Pages 10-11-12-13-14-15

Objectifs:
- *Travailler la liaison graphique-géométrique.*
- *Utiliser des décimaux ayant plus d'un chiffre après la virgule.*

Pages 16-17-18

SITUATION-III
Rechercher deux nombres de somme donnée.

Objectifs:
- *Utiliser une procédure soustractive.*
- *Utiliser la calculette pour changer les procédures.*

SITUATION-IV
Recherche des dimensions des triangles isocèles de périmètre donné.

Pages 19-20

Objectifs:
- *Réinvestir et étendre les connaissances acquises dans les situations précédentes.*
- *Approcher, en acte, la notion d'équation.*

Ces quatre situation-problèmes se sont déroulées durant cinq séances d'environ une heure et demie chacune.

III. PRESENTATION DU CONTENU

L'ensemble des cinq séances n'est pas une unité d'enseignement ayant fait l'objet d'une analyse préalable approfondie, leur articulation n'est pas le fruit d'une théorie de l'apprentissage des notions mises en jeu. Le choix des tâches proposées aux élèves et les décisions concernant le déroulement de l'enseignement sont le produit des contraintes qui se sont manifestées au fil des situations. Toutefois la ligne conductrice a été de placer, autant qu'il fût possible, les élèves en position de recherche et de choisir des tâches cohérentes avec les objectifs visés.

Voici le contenu des cinq séances.

Séance n°1 du 23/02/98

- *Question initiale : combien y a-t-il de rectangles de périmètre 12 cm ?*
- *Recherche de rectangles de périmètre 12 cm.*

Séance n°2 du 26/02/98

- *Bilan des résultats.*
- *Recherche de la deuxième dimension d'un rectangle de périmètre 12 cm la première étant donnée.*
- *Représentation sur un graphique des rectangles de périmètre 12 cm.*

Séance n°3 du 27/02/98

- *Travail sur la représentation graphique.*
- *Réponse à la question initiale.*
- *Familiarisation et réinvestissement. Procédure soustractive.*

Séance n°4 du 12/03/98

- *Recherche de deux nombres de somme 12.*
- *Familiarisation avec la procédure soustractive.*

Séance n°5 du 23/03/98

- *Recherche des dimensions des triangles isocèles de périmètre 8 cm.*

Les conditions de réalisation :

Chaque séance est préparée avec la maîtresse de la classe. C'est elle qui décide du moment où celle ci pourra se dérouler afin de ne pas perturber sa progression.
Pendant l'enseignement, la maîtresse et une personne du groupe didactique, toujours la même, interviennent tour à tour mais pas toujours de façon planifiée.

Les élèves sont filmés dans leur travail personnel et leurs interventions dans le but de recueillir des informations permettant aux intervenants de réguler la suite des séances. Cette pratique, habituelle dans cette classe, ne semble pas perturber les élèves.

L'équipe Didactique des mathématiques de l'IREM de Montpellier remercie la maîtresse et les élèves de la classe sans lesquels ce travail n'aurait pu aboutir.

IV. COMPTE RENDU DES SEANCES

Mardi 23 février 1998 : ***première séance***

Connaissances des élèves : - le rectangle (reconnaissance, propriétés, construction) - le périmètre du rectangle, en particulier les écritures $L + \ell + L + \ell$; $2 \times L + 2 \times \ell$; $2 \times (L + \ell)$

La classe est partagée en deux groupes de 13 et 15 élèves

<u>Premier groupe classe</u>

Introduction au problème

La maîtresse montre à l'ensemble de la classe trois rectangles découpés dans des cartons de couleurs différentes. Elle précise que ces rectangles ont le même périmètre : 12 cm. C'est l'occasion de rafraîchir la mémoire de la classe sur la notion de périmètre. Ensuite, elle pose la question suivante à laquelle chaque élève doit répondre par écrit :

«A votre avis existe-t-il beaucoup, pas beaucoup ou bien vous ne savez pas, de rectangles de périmètre 12 cm ?»

Par la suite on appellera cette question ¨la question initiale¨

<u>Réponses</u> : huit élèves répondent "beaucoup", cinq "pas beaucoup", les autres répondent "quelques-uns". La maîtresse ne met pas les réponses en débat et n'en valide aucune.

<u>Présentation</u> de la feuille de format A3 destinée aux réponses (annexe 1) : la maîtresse montre aux élèves comment placer les rectangles en carton dans l'angle droit marqué sur la feuille. Quelques-uns vont au tableau répéter l'opération.

Tâche :

L'énoncé est donné sur feuille individuelle. *"Dessiner 20 rectangles dont le périmètre vaut 12 cm.* *Placer au fur et à mesure dans l'angle droit les rectangles obtenus, comme on vous l'a montré"*

<u>Déroulement</u> :

Les élèves sont répartis en trois groupes de trois et deux groupes de deux. Chaque groupe dispose pour répondre de la feuille A3 présentée en annexe 2. La maîtresse, après avoir relu l'énoncé, s'assure de la compréhension de la consigne : les élèves doivent dessiner des rectangles en utilisant l'angle droit comme support de deux côtés.

Les élèves essaient de trouver des nombres mentalement avec peu de succès. Après 15 minutes tous les rectangles avec les dimensions entières sont obtenus. Les élèves ont de la difficulté à dessiner les rectangles dans l'angle droit, cette activité prend du temps et les empêche de se concentrer sur les nombres.

Un groupe, puis un deuxième, utilisent 0,5 et 5,5. Un autre groupe découvre que "ce qui compte c'est de faire 12" et donc qu'on peut utiliser les décimaux. Un groupe obtient 1,5 et 4,5. Un autre propose 2,2 et 3,4 et après correction 2,4 et 3,6.

Deuxième groupe classe

Introduction au problème

La question initiale est posée sans préalable, avec une modification : la présentation de la feuille A3 est supprimée afin de ne pas influencer les réponses.
"A votre avis y a-t-il beaucoup, pas beaucoup ou un seul rectangle de périmètre 12 cm ?"
Réponses : six élèves répondent "beaucoup", trois "pas beaucoup" , et six "un seul".

Tâche :

L'énoncé suivant est écrit au tableau. *"Trouver les dimensions de 20 rectangles de périmètre 12 cm"*

Déroulement :

Les élèves sont répartis en cinq groupes de trois.
Le groupe auquel appartient le meilleur de la classe démarre avec les dimensions 2 et 4 , puis
3 et 3 qu'il abandonne car ce sont celles d'un carré. Puis à la suite 0,1 et 5,9 ; 1,7 et 4,3. Commence alors une recherche systématique : 0,2 et 5,8 ; 0,3 et 5,7 etc jusqu'à 2,9 et 3,1 ; 3,1 et 2,9 ces dernières dimensions étant reconnues comme donnant le même rectangle que le précédent.
Un autre groupe pense au partage de l'unité et utilise les décimaux non entiers. Deux groupes n'ont pas encore utilisé les décimaux non entiers alors que les élèves de ces groupes ont des compétences reconnues en calcul. Il va s'avérer que ces groupes n'utilisent pas les décimaux non entiers pour deux raisons plus ou moins bien exprimées par les élèves : « cela n'est pas écrit » et « est-ce qu 'on a le droit d'utiliser des décimaux ? »
Dans ce deuxième groupe classe les élèves ont produit davantage de solutions.

Exemples de productions dans les deux groupes

- *choix de 1,5 puis 2 x 1,5 = 3 il faut aller à 12 ce qui fait 9 or 4,5 + 4,5 = 9. Cela donne les dimensions 3,5 et 2,5.*
- *choix de 3,5 puis 2 x 3,5 = 7 manque 5 or 2,4 + 2,6 = 5 (sic)*
- *choix de 2,2 et 3,6. L'observateur demande une vérification. L'élève essaie de tête mais perd les résultats intermédiaires ; l'observateur l'invite à écrire : ce qui donne "4,4 + 7,2 ça fait 11,6 il manque 4 mm mais 4 mm = 2 mm + 2 mm donc 3,6 + 0,2 = 3,8". Cela donne les dimensions 2,2 et 3,8.*
- *7 + 5 = 12 et comme il faut diviser par 2 on trouve 3,5 et 2,5.*
- *4,3 x 2 = 8,6 reste 3,4 ça fait 1,7. Ce qui donne 4,3 et 1,7.*
- *3 + 2 + 3 + 2 = 10 il reste 2 pour aller à 12 alors il faut faire 1 et 0,7 + 0,3 = 1 donc 3,7 + 2,3 + 3,7 + 2,3.*

Ecritures :

L x 2 = 5 cm + l x 2 = 1 cm le périmètre vaut 12 cm.
(4,5 cm x 2)+(1,5 x 2) = 12 cm.
L l
2l x 2 + 4L x 2 = 12.
3,6 + 2,4 + 3,6 + 2,4 = 12
2,5 x 2 = 5 + 3,5 x 2 = 7 = 7 + 5 =12.
1 mm + 5,9 cm + 1 mm + 5,9 cm

Commentaires:

1. A propos de l'introduction.

Le fait d'avoir montré trois rectangles au premier groupe élimine la réponse "un seul" et privilégie la réponse "pas beaucoup". On peut dire que 14 élèves pensent qu'il y a beaucoup de rectangles et qu'ils sont certainement plus de 6 à penser qu'il n'y en a qu'un seul. Le but de la question initiale est d'avoir une confrontation des réponses des élèves à la fin de l'activité.
Dans cette présentation, le rectangle est objet physique et par la suite les élèves devront dessiner des rectangles de périmètre donné dans l'angle droit en utilisant les côtés de l'angle doit comme support. Le rectangle devient une figure et change de statut, c'est un obstacle pour certains élèves. En effet, les uns dessinent les rectangles avec les quatre côtés, dont deux collés contre les côtés de l'angle droit, d'autres juxtaposent les rectangles pour reproduire les cartons qui ne sont pas transparents.

2. A propos du problème.

Le problème est proposé dans le cadre géométrique alors que l'on aurait pu demander simplement de trouver deux nombres dont la somme est 6. La valeur 12 du périmètre est choisie parce qu'elle permet d'obtenir des réponses en nombres entiers pour « démarrer » le problème et, de plus, elle fait apparaître le carré qui sera objet de débat dans les groupes.
On s'attend à ce que les élèves n'utilisent pas les décimaux non entiers. Pour cela la demande de 20 rectangles oblige les élèves à utiliser les décimaux non entiers comme une réponse au problème mais on ne voit pas se mettre en place des procédures liées aux propriétés des décimaux : par exemple, celles qui consistent à utiliser l'ordre des décimaux ou le passage à plus de deux décimales.
La demande de représenter les rectangles sur la feuille A3 avait pour objectif de mettre en évidence l'alignement des sommets n'étant pas sur les côtés de l'angle droit. La complexité de cette tâche « trouver et dessiner des rectangles de périmètre 12 cm » a fait que, pour le deuxième groupe, on n'a plus demandé de dessiner.

3. A propos des procédures.

A part dans un groupe, la recherche des nombres ne se fait pas sous le contrôle d'une stratégie.
Le passage aux décimaux non entiers est lent. Il semble que le fait que 12 soit un nombre entier enferme les élèves dans l'ensemble des entiers.
Dans la plupart des cas les premiers décimaux utilisés ont pour chiffre des dixièmes 5.On peut penser que l'usage du double décimètre a suggéré aux élèves des nombres décimaux à un chiffre après la virgule.

Le demi-périmètre n'est pas un outil et l'écriture 2 x (L + l) n'est jamais présente dans la mesure où ils pensent encore au rectangle objet (cf 1 « à propos de l'introduction) Par contre, le double des dimensions est utilisé. Les modèles littéraux opérants sont 2 x L + 2 x l = p et L + l +L + l = p. Un seul groupe produit une partie décimale à deux chiffres égale à 25 ou 75.

Dans les groupes les rôles se précisent rapidement : chercheur, calculateur, observateur ; les phases de validation entre élèves sont rares ; elles doivent être provoquées par l'intervention de l'observateur. Les élèves ont du mal à s'approprier par la seule observation, la démarche de celui qui trouve ; il y a peu de demandes d'explicitation de ces démarches par les élèves qui ne trouvent pas. Les élèves qui trouvent ont du mal à expliciter leur procédures.
Les procédures ne font pas apparaître l'opération soustraction mais la recherche du complément à 12. De même l'opération division par 2 est très rare, c'est le dédoublement qui est privilégié : exemple 4,5 + 4,5 et non 9 : 2 = 4,5.

Jeudi 26 février 1998 : **deuxième séance**

A - Premier temps : **calculs**

Objectif :

Institutionnalisation des procédures conduisant à la réussite.

Tâche :

Les élèves doivent trouver la deuxième dimension d'un rectangle de 12 cm de périmètre, la première dimension étant donnée.

Matériel :

Tableau sur feuille individuelle (annexe 3).

Introduction :

Le problème précédent est rappelé par les élèves. Le maître dit que chaque nombre de la première ligne a été trouvé la veille par des élèves comme une des deux dimensions d'un rectangle de 12 cm de périmètre et que chacun doit maintenant trouver la valeur de la deuxième dimension. Le maître explique l'emploi du mot dimension pour désigner la longueur ou la largeur des rectangles.
Le mot demi-périmètre n'est pas employé.

première phase : recherche

Déroulement :

Les élèves travaillent individuellement. Plusieurs cherchent à faire 12 (au lieu de 6) avec le nombre donné.
Certains cherchent à remplir les cases sans faire de calcul. On n'observe pas de stratégie consistant à utiliser les entiers en premier ; ce qui aurait pu conduire au demi-périmètre plus rapidement. Il faut à plusieurs reprises donner des précisions sur la tâche .
La recherche est arrêtée quand la majorité des élèves a trouvé.

Commentaires :

Cette fois un nombre étant donné il faut en trouver un second pour atteindre le périmètre 12 , alors que précédemment il fallait trouver quatre nombres égaux deux à deux pour faire 12. Les élèves ont besoin de dessiner des rectangles pour redonner du sens aux calculs. La tâche est plus simple si le demi-périmètre intervient mais peu d'élèves l'emploient. L'opération de soustraction est très rarement utilisée.

deuxième phase : bilan

Déroulement :

Trois élèves ayant utilisé des procédures différentes viennent les exposer au tableau.

- *1,4 x 2 = 2,8 recherche du complément à 12 c'est 9,2 puis 4,6 par dédoublement.*
- *12 - 2,8 = 9,2 puis 9,2 : 2 = 4,6.*
- *1,4 et recherche du complément à 6.*

Après discussion la procédure demi-périmètre est reconnue par la classe comme la plus simple. Le maître demande comment on aurait pu faire pour obtenir rapidement le second nombre avec la troisième méthode. Péniblement les élèves évoquent la soustraction bien que celle ci soit apparue avec la deuxième procédure. Quelques exemples sont alors traités en commun. Les retardataires reprennent leurs tableaux mais il leur faudra encore de l'aide pour les compléter.

B - Deuxième temps : **graphique**

Objectifs :

Familiariser les élèves avec les mesures décimales ayant un chiffre après la virgule.
représenter graphiquement des rectangles solutions.
Obtenir l'alignement des « quatrièmes sommets ».

Tâche :

Les élèves doivent dessiner sur la feuille (annexe 3) avec les conditions imposées les rectangles correspondant aux cases marquées d'un point noir dans le tableau.

Matériel :

Sur du papier quadrillé 0,5 cm x 0,5 cm sont tracées deux demi-droites de même origine, graduées et perpendiculaires formant un repère orthonormal.

Introduction:

Sur le repère sont déjà dessinés les rectangles désignés par les cases marquées d'une croix dans lesquelles le chiffre des dixièmes est différent de 5. On demande aux élèves de repérer ces rectangles par leurs dimensions en lisant sur les droites graduées et de suivre avec le doigt le contour des rectangles pour les distinguer. On a précisé que la première dimension se lit sur la droite "horizontale" et la deuxième sur la "verticale".

Première phase : Recherche

Déroulement :

Les élèves travaillent individuellement. L'activité ne présente pas de difficulté particulière.

Commentaires :

La présence du quadrillage facilite le repérage des 5/10 de l'unité, le dessin des rectangles est beaucoup plus soigné que ce qu'il avait été lors de la première tentative, la veille, avec le premier groupe.
La figure est assez encombrée mais cela constitue une difficulté minime.

Deuxième phase : Mise en commun

Déroulement :

Le maître dessine au tableau un rectangle dans le repère et numérote les sommets 1,2,3,4 le quatrième n'étant pas sur les droites graduées. On demande aux élèves s'ils ont des commentaires à faire sur tous les sommets portant le numéro 4. Il faut du temps avant que quelques élèves ne remarquent l'alignement. On demande alors de tracer la droite qui passe par ces sommets. Les tracés sont suffisamment précis *chez la plupart des élèves et peu de quatrièmes sommets sont en dehors de cette droite, ce qui conduit à en rechercher les raisons.*

Commentaires :

Ce n'est qu'à la fin de cette deuxième séance que l'objectif « alignement des quatrièmes sommets » est atteint alors qu'on avait espéré l'atteindre dès la première séance en demandant au premier groupe classe de dessiner les rectangles dans l'angle droit.

Vendredi 27 février 1998 : ***troisième séance***

Premier temps : utilisation du graphique.

Objectifs :

- *Correspondance entre chaque point de la droite tracée et un rectangle de périmètre 12 cm.*
- *Utilisation de décimaux d'ordres deux et trois (deux ou trois chiffres après la virgule).*
- *Obtenir la réponse à la question initiale : il y a autant de rectangles de périmètre 12 que l'on veut.*

Tâche :

A partir des points A, B, C marqués, obtenir les dimensions des rectangles correspondants.
Commencer par A, B, puis C.

Matériel :

Graphique sur feuille individuelle quadrillée 0,5 x 0,5 (annexe 4) l'unité sur chaque demi-droite
est 2 cm, soit 4 "carreaux".
Règle, équerre.

Introduction :

Les feuilles sur lesquelles les élèves ont tracé la veille les rectangles et la droite des sommets sont redistribuées. Les élèves sont invités à rappeler en quoi avait consisté le travail et quels étaient les résultats obtenus. La situation est bien présente en mémoire et a conservé son sens.
A la question «qui peut dire ce qu'on va faire maintenant ?», un élève répond qu'il va falloir tracer les trois rectangles de quatrième sommet A, B et C puis, un autre élève, qu'il va falloir en donner les deux dimensions.

Déroulement :

Les élèves se lancent dans le tracé des trois rectangles, la maîtresse doit rappeler la consigne.
Beaucoup d'élèves utilisent le double décimètre ; ils se retrouvent avec des dimensions supérieures à 6. On est obligé de dire que la règle graduée est ici inutile et qu'il faut utiliser les carreaux. Un élève convertit les cm en carreaux, c'est le meilleur de la classe et il n'y réussit pas totalement.
Le partage en quatre parties égales de l'unité n'induit pas les parties décimales 0,25 et 0,75. Des nombres de somme 6 sont bien proposés mais avec des décimaux d'ordre un ajustés pour la circonstance par exemple pour A les nombres 1,2 et 4,8 sont proposés.
Il faut une aide individuelle pour amener les élèves à sortir de l'impasse.

La maîtresse fait une intervention au tableau pour institutionnaliser la procédure de conversion des quarts en écriture décimale. Pour cela, elle utilise une procédure qui

a réussi auprès d'un élève. Elle écrit : 1,5 = 1,50 faisant ainsi apparaître les décimaux d'ordre deux puis elle utilise la notion de «nombre qui est au milieu».
La grande majorité des élèves a trouvé les dimensions des rectangles "A" et "B". Un bon nombre d'élèves s' engagent dans la recherche du "C" mais ne passent pas à l'ordre trois, ils réajustent l'ordre deux. Quelques uns cependant réussissent à trouver les bons nombres.
Une étude collective suit car la graduation est un obstacle trop grand pour être maîtrisé dans cette situation où elle devrait servir d'outil. Les élèves vont par la suite s'approprier des décimaux d'ordre trois qui conviennent et les situer sur la droite graduée.

Commentaires :
Le graphique fourni aux élèves comporte deux axes gradués. Cet élément du milieu devait être utilisé par les élèves pour produire des dimensions décimales d'ordre 2. On pouvait l'espérer car ils avaient auparavant travaillé sur des droites, graduées de façon non standard. Ils n'ont pas pris l'initiative d'utiliser les graduations pour résoudre ce problème nouveau. Cela montre à quel point l'analyse préalable des savoirs qui interviennent dans le problème doit être fine et complète.

Deuxième temps : bilan

Question :
Quel type de nombre peut être utilisé pour les dimensions de rectangles de périmètre 12 cm ?
La classe désigne les décimaux de tous ordres sans ambiguïté. On fait le compte de ceux qui ont changé d'avis depuis le premier jour où la question avait été posée. La nouvelle conception semble avoir pris place.

Troisième temps : familiarisation, réinvestissement

Objectifs :

- Calculer avec des décimaux d'ordre trois ou plus.
- Changer de point de vue pour résoudre un problème.
- Utiliser la soustraction lorsqu'elle est un outil efficace.

Première phase :
Matériel :

La feuille individuelle qui se trouve en annexe 5.

Tâche :

Répondre aux questions de l'annexe 5

Commentaires sur la tâche :
Les élèves savent maintenant que les dimensions des rectangles de périmètre 12 cm peuvent être des décimaux de tous ordres. Tous n'en ont cependant pas produit pendant les phases de recherche.
L'exercice de l'annexe 5 va leur permettre de fréquenter de tels nombres.

La notion de demi-périmètre a été rencontrée et utilisée, elle fait partie de la mémoire de la classe. Mais à son sujet, rien n'a été institutionnalisé.

Le problème peut alors se ramener avantageusement à la question : « la somme des deux nombres est elle égale à 6 ? ». *Adopter ce point de vue c'est décontextualiser le problème et le replacer dans le numérique pur. Dans les deux cas où la réponse est* non *le résultat peut être obtenu sans calculs.*

Introduction
La maîtresse précise que la machine est interdite et insiste sur le fait que des réponses peuvent être données sans calcul.

Déroulement :
Si l'on désigne par a et b les deux nombres donnés :
25 élèves sur 27 utilisent la procédure a + b = 6.
Une élève utilise 6 - a = b.
7 élèves mettent en jeu le périmètre 12 sous la forme a + b = c et 2 x c = 12 ou 2 x c = 12. Une élève produit a + b puis a + a + b + b.
Trois élèves seulement donnent des preuves autres faisant appel à la numération de position ou à l'ordre de grandeur dans les deux items 2 et 5 où la réponse est non .

La correction est rapidement faite et ceux qui avaient utilisé d'autres arguments que le calcul dans les cas de type non *en font part à la classe, ils n'ont aucun problème pour convaincre les autres élèves.*

Commentaires :
Les nombres proposés comme dimensions ne peuvent être le résultat de mesures faites à l'aide du double décimètre. Il est à noter qu'aucun élève n'a explicitement évoqué l'existence de tels rectangles. Par ailleurs, il semble que lorsque les élèves s'engagent dans une procédure, ils ne cherchent pas à en trouver une plus performante même s'ils en ont les moyens.

Deuxième phase :
Matériel :

La feuille individuelle qui se trouve en annexe 6.

Tâche :

Répondre aux questions de l'annexe 6.

Commentaires :
Cet exercice reprend le problème de la deuxième séance (annexe 1). Les élèves avaient peu utilisé le demi-périmètre et la soustraction. La consigne exige l'utilisation de la calculatrice. Dans une procédure d'addition et d'essais répétés, la machine, à la fin, ne peut être qu'un outil de validation du choix des nombres. Tout le travail est mental. Par contre la machine devient l'outil performant dans une procédure de soustraction et dans ce cas la suite des actions sur les touches est cohérente avec la pensée.

Jeudi 12 mars 1998 : ***quatrième séance***

Plus d'une semaine sépare cette séance de la précédente.

Objectifs :

Réinvestir et consolider les acquis des séances précédentes en se situant dans le cadre numérique, utiliser la soustraction.

Tâche :
Trouver deux nombres dont la somme vaut 12.

Introduction :
La maîtresse dit : «8 et 2 sont deux nombres dont la somme vaut 10. Maintenant vous devez trouver des exemples de deux nombres dont la somme vaut 12»

Déroulement : premier temps
Par groupes de deux.
Les élèves trouvent rapidement des couples d'entiers.
*Il y en a toujours qui demandent s'ils ont «**le droit** d'utiliser les décimaux».*
Des nombres avec les parties décimales 0,5 et 0,05 apparaissent rapidement.
La recherche se fait toujours sans véritable stratégie.

Procédures :
La maîtresse présente les résultats de quelques groupes :
6 + 6 ; 10 + 2 ; 5 + 7 ; 4 + 8 ; 3 + 9 ; 12 + 0. *La majorité des groupes a produit ces solutions.*
Puis elle donne : ***11,5 + 0,5 et 0,7 5+ 11,25.*** *Elle fait remarquer la présence du chiffre 5 en dixième et en centième d'unité.*
Ensuite : ***7,81 + 4,19****. Un élève du groupe qui a produit cette solution vient expliquer comment il l'a obtenue : «j'ai fait 7 + 4 = 11 puis 8 + 1 = 9 et 1 + 9 = 10».*
Le même élève explique pour ***8,001 + 3,999.*** *«J'ai voulu faire avec des millièmes, j'ai pris un chiffre au hasard pour les millièmes, non d'abord 8 par exemple, puis 1 pour les millièmes ....»*
Il recommence avec ***7,015*** *: «j'ai cherché un chiffre qui avec 7 fait 11 ; 4 + 7 = 11 puis virgule, et on essaie qu'avec 15 ça fasse 1 ça fait .... 985 (avec un peu d'hésitation)».*

Commentaires :
La procédure employée est celle de l'addition à trous, disposée en ligne. La numération de position, qui est un savoir des élèves, permet de trouver facilement les compléments à 12.
Beaucoup d'élèves n'ont produit que des couples avec des dixièmes. La maîtresse est obligée de relancer l'activité.

Déroulement : deuxième temps
La maîtresse demande de trouver des couples avec des chiffres des millièmes différents de 5

Pour montrer ce qui est attendu du point de vue des nombres, elle trace au tableau le modèle suivant :

*, * * * *

*, * * * *

Les élèves trouvent des réponses mais adoptent la disposition du modèle resté au tableau, alors que cette disposition n'avait pas été utilisée auparavant.

Procédures :

Deux procédures sont majoritairement observées :

- choix de deux chiffres de somme 11 puis ajustement des décimales pour faire 1 (procédure déjà présentée par l'élève au tableau.)

- choix d'un chiffre des millièmes pour un nombre et ajustement de proche en proche en utilisant la retenue.

Commentaires :

Comme c'était prévisible, l'écriture au tableau qui se veut une aide, devient un modèle à suivre et se constitue en obstacle pour la mise en place de la procédure soustraction.

L'utilisation de la soustraction a été rencontrée dans la séance précédente. Les élèves en avaient apprécié la performance. Ici le problème ne fait plus référence ni au rectangle ni au périmètre. La procédure ne semble pas facilement s'abstraire du milieu dans lequel elle a été rencontrée.

La maîtresse va rechercher un nouveau moyen pour «faire sortir» la soustraction.

Déroulement : troisième temps

On demande à un élève de donner un nombre avec quatre chiffres après la virgule ; il choisit

3,8603.

La maîtresse écrit : ***3,8603 + ? = 12****. Immédiatement des élèves lèvent le doigt pour signaler qu'ils ont compris ce qui était attendu comme opération.*

Ils posent effectivement la soustraction, mais ils le font sous la pression du nouveau contrat et ne sont pas intimement convaincus du gain apporté par cette procédure, tant ils maîtrisent les autres dérivant de l'addition.

La maîtresse donne alors la nouvelle consigne :

«Avec la calculatrice uniquement trouver le nombre manquant dans les égalités

3,071903 + ? = 12 ***123,7205 + ? = 1025*** »

Commentaires :

En cherchant deux nombres dont la somme est 12, les élèves semblent se représenter le problème comme la recherche de deux nombres inconnus, bien qu'ils se donnent des contraintes sur leur choix. Cette représentation, que l'on peut traduire par ***x + y = 12,*** *est cohérente (congruente) avec le texte du problème - il va de soi que de telles écritures n'ont pas été utilisées en classe -.La représentation du problème doit changer pour que soit mise en oeuvre la soustraction car il faut se donner un nombre puis considérer l'autre comme inconnu, ce que l'on peut traduire par* ***a + x = 12****. Cette représentation n'est-elle pas du domaine du pré-algébrique et à ce titre inaccessible à ce niveau? Pourtant Alain Descaves rapporte dans son livre(cf bibliographie)*

des réalisations de résolution de problèmes, par des élèves de CM ,s'engageant dans une démarche algébrique.
Il faut aussi constater que les élèves, dans leur grande majorité, ne rapprochent pas des problèmes ayant la même structure mais posés dans des contextes différents.

Lundi 23 mars 1998 : ***cinquième séance***

Objectif :

Faire fonctionner dans un problème voisin les outils mis en oeuvre dans les séances précédentes (cf R. Douady : dialectique ancien-nouveau). faire découvrir un algorithme de résolution utilisant la calculette et mettant en oeuvre la soustraction.

Tâche :

Trouver les dimensions de triangles isocèles de périmètre 8 cm.

première phase : *sans calculette*

Déroulement :

Tous les élèves savent ce qu'il faut faire. Ils choisissent des nombres décimaux non entiers de leur propre initiative, les décimaux d'ordre deux ont majoritairement le chiffre 5 pour centième. Peu d'élèves envisagent des ordres supérieurs.
Certains oublient des contraintes du problème et cherchent trois nombres de somme 8.

Commentaires :

Les nombres 2, 2, 4 sont proposés par la majorité des groupes, une seule élève évoquera le problème de l'existence du triangle 2, 2, 4 mais elle ne pourra pas expliciter la difficulté rencontrée.
Aucun autre élève n'éprouvera le besoin de dessiner les triangles correspondant aux nombres trouvés, ce qui, d'ailleurs, ne faisait pas partie de la tâche.
Comme les élèves se sont plongés immédiatement et sans difficulté dans le cadre numérique, il a été jugé inutile de poser à toute la classe le problème de l'existence éventuelle de certains triangles.

Procédures :

Si l'on désigne par **a** *chacun des nombres égaux et par* **b** *le troisième on a les procédures suivantes :*
1 - majoritairement **a + a + b** *=8. Le nombre* **b** *est obtenu mentalement par une addition à trou lorsque les nombres décimaux sont d'ordre un. Les élèves qui vont au-delà posent l'addition* **a + a** *et cherchent le complément à 8 en colonne.*
2 - deux groupes utilisent **2** *x* **a + b**
3 - un groupe utilise **b + a + a**
La dernière procédure conduit les élèves à choisir pour b un entier compris entre 1 et 7. Ils n'iront pas plus loin.

Explicitation de certaines procédures :

Anaïs*:*
Elle n'a pas produit d'exemple avec les nombres décimaux : puis elle essaie avec 3,4. Elle double : 6,8 : "il faudrait que j'ajoute un autre nombre pour que ça fasse 8 pile"
Anaïs essaie 2,2 (6 + 2 unités) mais elle voit la retenue. "ça ferait 9".
Elle essaie 2,1"ça ne va pas .... ah alors on pourrait prendre dans les 1,.... peut-être que là ...."

Anaïs trouve 12 par addition.
Cette élève ne modifiera que bien plus tard cette procédure consistant à choisir une somme des unités égale à 8 pour ensuite arriver au résultat par ajustements successifs.

Jessica - Cindi:
«1,5 + 1,5 ça faisait 3 et on a cherché que ça fasse 8 et on trouve 5».
Elles essaient avec 2,436. Placées devant 2,436 + ... elles restent bloquées, car elles craignent de dépasser 8 en ajoutant à nouveau 2,436. «Il faut le répéter et après on cherche le nombre que ça va faire et on prend ce qu'on n'a pas pour faire 8». Elles obtiennent 4,872, «il faudra que j'ajoute 4 oui mais après si ça fait une retenue ? ».
Toujours placées devant 2,436 + 2,436. «oui on avait fait moins le périmètre et on avait trouvé. Il fallait trouver 12, elle nous avait dit de faire l'opération moins ; 6 moins ....non 8 moins».
Elles trouvent le résultat et déclarent «maîtresse, on peut en trouver une infinité puisque.....».

Romain
«On a pris un nombre par exemple 3,71 on le multiplie par 2 ça fait un chiffre et à partir de ce nombre on le soustrait à 8».
Cette équipe utilisera indifféremment cette procédure ou l'addition à trou.

Bilan :
La maîtresse inscrit au tableau les deux choix rencontrés pour le premier nombre :
soit l'un des deux nombres égaux,
soit l'autre.
*Elle demande au groupe (*Karine - Julie*) qui a fait le deuxième choix mais n'a pas utilisé la soustraction d'expliciter leur démarche : «on savait que 5 + 3 ça faisait 8 et on a pris la moitié 1,5». Cette équipe reproduit le procédé avec d'autres nombres entiers sans aller au-delà.*

***deuxième phase :** avec calculette*

Déroulement :
Les élèves produisent majoritairement la procédure : **a + a suivi de 8 - (a + a)**, ou **a + a -8**.
Aucune de ces procédures ne correspond à un algorithme acceptable car la première reprend un résultat intermédiaire et la seconde donne un résultat négatif. La maîtresse donne alors comme consigne de ne pas taper deux fois le même nombre. A la calculette, ***8 [-] 2 [x] a*** *donne*
(8 - 2) x a*.*
Il reste comme seule procédure possible **8 - b**. *Mais on observe que les élèves ont du mal à interpréter le résultat de* **8 - b** *comme étant le double de* **a**.
La maîtresse explicitera la consigne à l'aide d'un schéma : elle dessine un triangle isocèle, montre le périmètre, puis efface la base et met en évidence par codage les deux longueurs égales. Les élèves comprennent alors aussitôt la suite des touches :
8 [-] b [=] [:] 2 [=]

V. Conclusion :

Nous essayons d'interpréter les informations recueillies durant les cinq séances.

L'utilisation des décimaux : les *décimaux non entiers ne viennent pas à l'initiative des élèves comme réponse au problème des dimensions des rectangles de périmètre donné. Leur utilisation doit être forcée, soit par la contrainte : 20 rectangles, soit par la négociation, bien difficile à mener sans fournir la réponse. Après que les décimaux aient été reconnus comme solutions possibles, les élèves se limitent pour beaucoup à l'ordre un.*
Nous pensons qu'il y a au moins deux raisons à cela :
- ces décimaux suffisent à répondre. Il faudrait envisager des contraintes nouvelles dans le problème.
- les élèves font des additions en ligne pour trouver et donner les dimensions. Cette disposition n'est pas performante pour traiter des nombres avec plusieurs chiffres après la virgule et engage les élèves dans des procédures de calcul mental vite saturées.
Au cours de la quatrième séance les décimaux d'ordre supérieur à un vont être utilisés beaucoup plus spontanément. Malgré tout, la majorité des élèves repasse par les nombres entiers puis les décimaux d'ordre un. Un apprentissage a certainement eu lieu mais pour beaucoup il faudra souvent un encouragement à aller plus loin .

La représentation du problème :
Nous voulons parler de la réelle difficulté qu'ont eue les élèves à oublier l'image de l'objet rectangle avec ses quatre cotés et de son périmètre vu concrètement égal à $L + \ell + L + \ell$.. Le problème est interprété comme la recherche de quatre nombres fussent-ils égaux deux à deux. Cette représentation est certainement un obstacle à l'utilisation du demi-périmètre qui ramènerait ainsi le problème à la recherche de deux nombres.
Par contre, quand le problème est posé dans le contexte numérique l'image du rectangle n'est pas spontanément mobilisée pour faire progresser la recherche.

Les procédures:
L'addition à trou est la procédure unanimement adoptée. Elle épouse dans le faire ce que l'énoncé dit : «trouver deux nombres dont la somme vaut tant». C'est à dire « $x + y = p$ » .
Le signe égal étant pris ici comme annonçant le résultat de l'opération. Les élèves manifestent une aisance certaine dans l'utilisation de cette procédure, ce qui témoigne de connaissances assurées sur la numération de position.
La procédure de soustraction, si longue à être mise en place et acceptée dans ces séances, nécessite la reformulation suivante du problème : «le nombre cherché est la différence de deux autres». Cela s'écrit « $x = p - y$ ». Le signe égal confère alors à x le statut de différence (non effectuée).
Il nous semble, comme on l'a déjà souligné, que cette procédure dérive d'une pensée pré-algébrique, ce qui pourrait être une explication de la difficulté rencontrée ici.

L'investissement des élèves :
Nous pensons que c'est le résultat capital de ce travail. Bien que le rapport au problème reste fortement dépendant de la situation d'enseignement, nous voulons dire que les élèves sont toujours sensibles aux attentes de la maîtresse, et ont tôt fait de considérer ses déclarations comme des normes. L'engouement pour la recherche des solutions de ces problèmes - souvent qualifiés d'abstraits - est un invariant de ces séances. Les élèves éprouvent un réel plaisir à investir le champ des nombres et sont capables de construire du sens à leur égard.

L'investissement de l'enseignant :
On ne peut pas conclure ce travail sans parler de celui de l'enseignant qui s'investit dans une démarche de résolution de problèmes. Le choix pertinent a priori des problèmes, la planification des séances, les analyses a posteriori, la régulation qui s'ensuit et enfin la gestion de la classe dans le sens d'un apprentissage mû par la recherche de problème nous semble être du domaine de la formation continue et du travail d'équipe.

Bibliographie

Brousseau Guy : Problème de didactique des décimaux RDM vol 2.1Grenoble 1981.

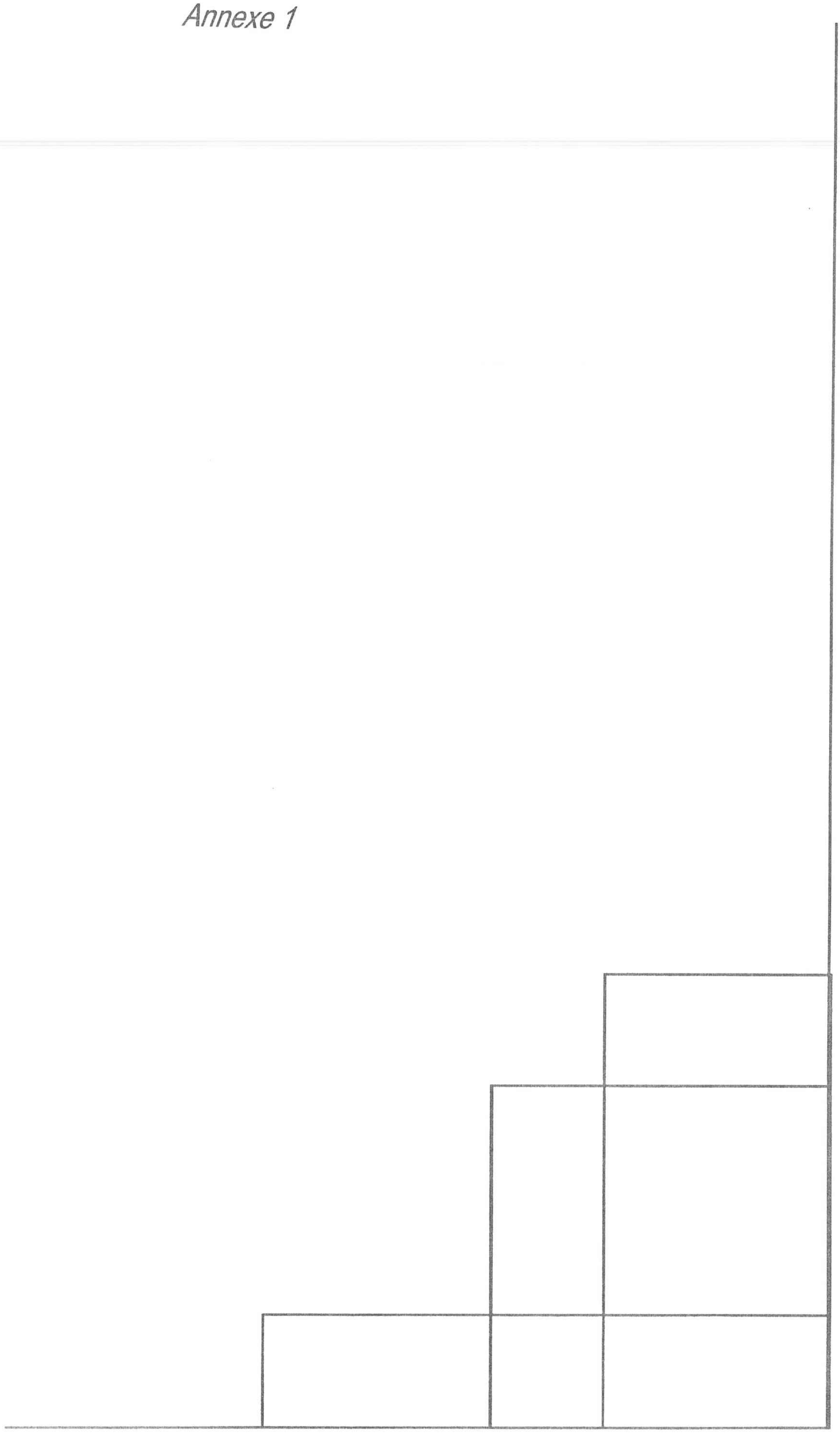
Charnay Roland : Communication au colloque COPIRELEM La Grande Motte 1996.

Descaves Alain : Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes Hachette Education.

Douady Régine : Thèse de doctorat d'état Université PARIS VII Spécialité, Didactique des Mathémathiques. RDM 7/2 La Pensée sauvage 1986.

Vergnaud Gérard : L'enfant, la Mathématique et la Réalité edt.Peter Lang,Berne 1983.

Annexe 1

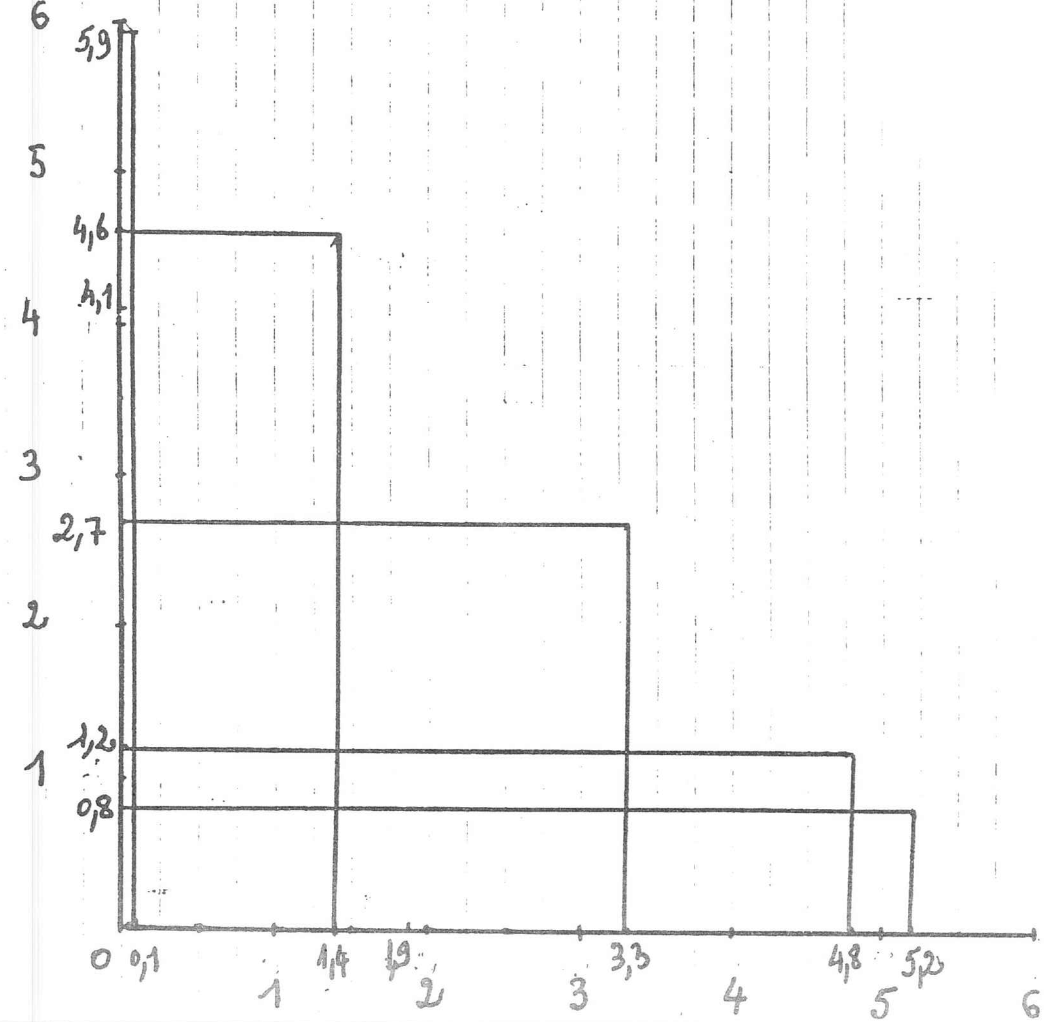


Annexe 2

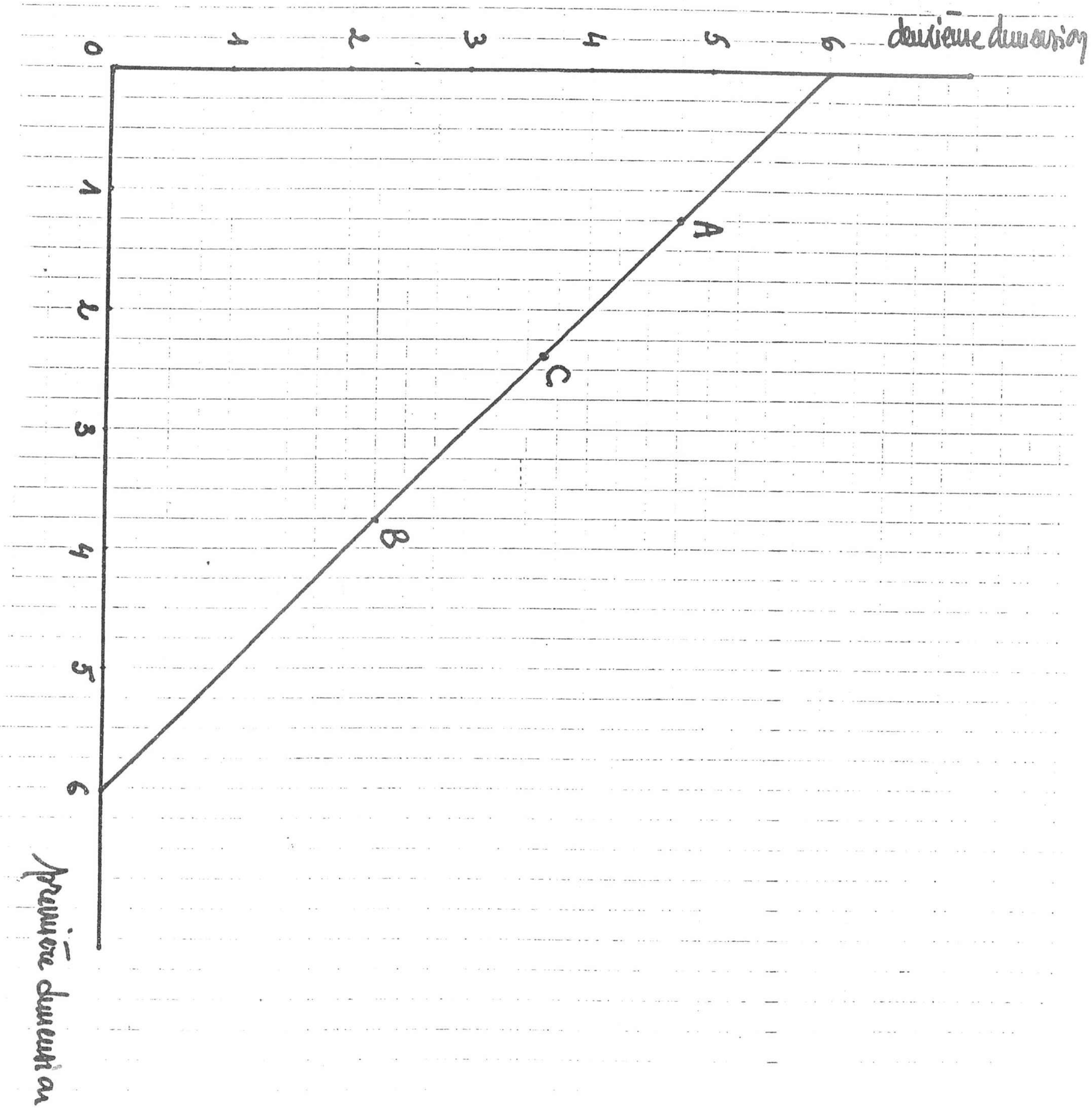
Explications et Calculs

Annexe 3

1ère Dimension	0,1	0,5	0,8	1	1,4	1,5	1,9	2	2,3	2,5	3	3,3	3,5	4	4,5	4,8	5	5,2	5,5	5,9
2ème Dimension																				
	×	●		●	×	●	×	●		●	●	×	●	●	●	×	●	×	●	



Annexe 4



Annexe 5

Nom:

Compléter le tableau des dimensions de rectangles ayant pour périmètre 12 cm .Avec calculatrice

1ère dimension	2,7	3,01	0,729	0,09	5,109	3,99999
2ème dimension						

CALCULS

Annexe 6

27/02/1998: nom:
séance n° 3

Répondre par OUI ou par NON puis donner la preuve. *sans calculatrice*

Ces nombres sont-ils les dimensions d'un rectangle de périmètre 12 cm?

preuves

1,237 et 4,763 :

3,0528 et 2,948:

3,1111 et 2,8889:

5,026 et 0,974:

3,1077 et 3,09:

2,1234567 et 3,8765433:

Auteur : *Groupe Didactique*

Titre : *Pour mieux connaître les décimaux : compte-rendu d'une suite de séances dans une classe*

Date : *Janvier 1999*

Nombre de pages : *23*

ISBN : *2-909916-33-2*

Type de document : *Fascicule IREM*

Support : *Papier*

Type d'utilisateur : *Professeur des écoles, professeur de collège, formateur*

Résumé :

Ce fascicule contient l'élaboration et le déroulement dans une classe de CM 2 , de cinq séances sur le thème de la recherche des dimensions de rectangles de périmètre donné. L'objectif des auteurs est de montrer qu'il est possible, sous certaines conditions, d'organiser dans une classe de ce niveau, une véritable activité de résolution de problème.

Les lecteurs pourront certes, y trouver des idées pour organiser de telles situations de recherche mais surtout de quoi alimenter une réflexion sur leurs pratiques.

Mots clés : *Décimaux non entiers, périmètre, demi-périmètre, représentation graphique,*
soustraction, relation entre le numérique , le géométrique et le graphique.