Enjeux des Géométries non euclidiennes

Thomas Hausberger, Manuel Bächtold

Equipe IREM Mathématiques et Philosophie[1]
IREM de Montpellier
http://www.irem.univ-montp2.fr/

ENJEUX des Géométries non euclidiennes

FICHIER SATELLITE

Disciplines	Mathématiques - physique - philosophie
Thème	Géométries non euclidiennes
Descriptif	Ce document de synthèse est destiné aux enseignants de mathématiques, de sciences physiques et de philosophie, et plus généralement à tous ceux qui souhaitent se former sur les géométries non euclidiennes (que nous désignerons ci-après par le sigle GNE). Le texte présente, de manière synthétique, différents « enjeux » (épistémologiques, scientifiques, cognitifs,...) de ces géométries. Il renvoie à chaque fois à une ressource (ou autre satellite) produite par l'équipe IREM math-philo et/ou à des ouvrages et textes publiés détaillant l'aspect identifié comme un enjeu, de façon à permettre un approfondissement. Les points abordés sont les suivants : 1. La chute de l'empire euclidien 2. Les géométries non euclidiennes : une crise de l'espace 3. Un obstacle ontologique et épistémologique à dépasser 4. Le concept d'axiome 5. Une nouvelle conception de l'existence et de la vérité en mathématiques 6. Le rôle de l'expérience 7. Les géométries non euclidiennes dans le cadre des théories de la relativité restreinte et générale 8. Les mathématiques, une science formelle 9. Les géométries non euclidiennes et la crise des fondements mathématiques 10. Les géométries non euclidiennes viennent enrichir la théorie mathématique
Objectifs	Ce document permet, d'une part, d'offrir un panorama sur les GNE, en termes d'enjeux qui sont autant de prismes et portes d'entrée pour un questionnement sur les GNE et, d'autre part,

1 Bächtold Manuel, François Thomas, Guin Daniel, Guin Dominique, Hausberger Thomas, Pinet Véronique, Reboul Henri, Vergnerie Cédric

	d'articuler les différentes ressources produites autour de ces différents prismes.
Fichiers constitutifs	enjeux_GNE.pdf
Mots-clés	Géométries non euclidiennes, axiomes et postulats, fondements des mathématiques, théories de la relativité, histoire des sciences et épistémologie.
Auteurs	Thomas Hausberger Manuel Bächtold

ENJEUX des Géométries non euclidiennes

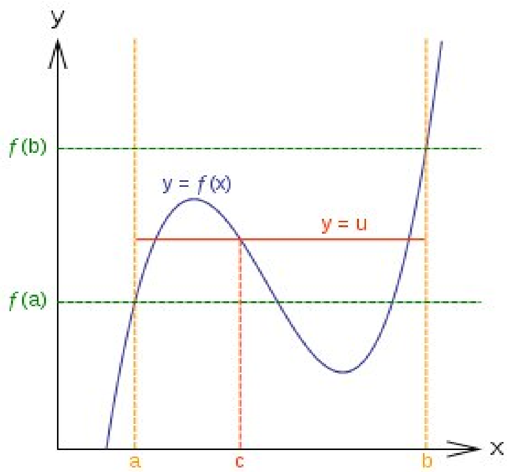
1. La chute de l'empire euclidien

Depuis l'antiquité grecque et jusqu'au XIXème siècle, la géométrie est considérée comme le champ des mathématiques le plus solidement fondé, le prototype de la rigueur, de l'exigence intellectuelle (Platon n'aurait-il pas fait graver « Que nul n'entre ici s'il n'est point géomètre ! » au fronton de son académie). Les autres branches des mathématiques se sont pour cette raison tournées vers la géométrie pour fonder leurs vérités : par exemple, même si les domaines de nombres ont été étendus pour inclure les irrationnels et les transcendants, la plupart des mathématiciens a cherché à établir cette extension du concept de nombre à partir de la géométrie d'Euclide (en particulier sa théorie des grandeurs).

Cette attitude change au milieu du XIXème siècle lorsque l'on mit en avant les insuffisances des démonstrations euclidiennes (certains appels à l'intuition subsistent, le système d'axiomes est incomplet) et que des géométries alternatives furent construites, amenuisant l'autorité d'Euclide. C'est d'un certain point de vue un absolu qui a été relativisé.

Il devient alors inacceptable que certains théorèmes d'analyse restent fondés sur l'intuition géométrique. Par exemple, alors que Cauchy (1789-1857), dans son cours à Polytechnique en 1821, présente encore comme une évidence géométrique le fait qu'une fonction continue s'annule entre deux points où elle prend des valeurs de signe opposé[2], Bolzano (1781-1848) s'insurge contre un tel procédé et donne en 1817 une preuve purement analytique de ce théorème. Bien que la géométrie ait été axiomatisée rigoureusement par Hilbert, elle perd son rôle de socle de l'analyse. Au XIXème siècle, l' « arithmétisation » de l'analyse devient le slogan : l'analyse est désormais fondée sur une construction des nombres réels à partir des rationnels donc des entiers, que les mathématiciens et

2 C'est l'idée intuitive qu'une courbe représentant graphiquement une fonction continue *f* se trace sans lever le crayon : si elle passe par deux points de coordonnées *(a,f(a))* et *(b,f(b))* situés de part et d'autre d'une droite d'équation *y=u*, alors cette courbe coupe nécessairement la droite puisqu'elle ne peut effectuer de « saut ». Toutes les valeurs *u* intermédiaires entre *f(a)* et *f(b)* sont donc prises par la fonction.



Bien qu'il donne de ce théorème des valeurs intermédiaires, dans une note de son cours, une démonstration analytique utilisant le principe de dichotomie, Cauchy met en avant le raisonnement géométrique ci-dessus et lui prête le statut de démonstration.

logiciens s'efforcent de présenter sous la forme d'axiomatiques abstraites. C'est vers la non-contradiction de l'arithmétique que l'on se tournera pour démontrer la non-contradiction de la géométrie. Cela traduit un retournement de situation : les vérités géométriques sont désormais fondées sur le nombre et non l'inverse.

Pour aller plus loin :

- Dahan-Dalmédico, A. & Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques : Routes et dédales*. Paris : Seuil.
- Boniface, J. (2002). *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*. Paris : Ellipses (Collection IREM - Epistémologie et Histoire des Mathématiques).

2. Les Géométries Non-Euclidiennes : une crise de l'espace

Les Géométries Non-Euclidiennes (notées GNE dans la suite),sont nées d'une remise en question du 5ème postulat d'Euclide. Certains énoncés logiquement équivalents à ce dernier (sous les autres axiomes et postulats[3]), mis en évidence au cours de l'histoire des GNE, permettent de mieux cerner la signification de ce postulat :

- Etant donnée une figure, il existe une figure semblable de taille arbitraire (Wallis 1616-1703)
- Il existe deux triangles inégaux (non superposables) ayant les mêmes angles (Saccheri 1677-1733)
- On peut construire un triangle ayant une aire arbitrairement grande (Gauss 1777-1855)

Ces énoncés de la géométrie euclidienne impliquent une propriété de l'espace : en termes mathématiques, celle d'être stable par homothétie. Ou encore : ce qui se passe à petite échelle est semblable à ce qui se passe à grande échelle.

Les GNE n'impliquant pas cette propriété de l'espace, Gauss pense que l'investigation expérimentale de la nature de l'espace permettra de trancher entre les différentes géométries (voir point 6 ci-dessous).

Le questionnement passe ainsi d'un questionnement sur les propriétés des objets de l'espace à une étude de l'espace pris comme objet. Riemann (1826-1866) réalise que l'on peut obtenir une géométrie non euclidienne (en dimension 2, donc à mettre en parallèle avec la géométrie euclidienne dans le plan) sur la sphère considérée comme une surface de l'espace euclidien de dimension 3. Ce sont des géodésiques (lignes de plus court chemin entre deux points), donc des « grands arcs » sur la sphère) qui jouent le rôle de lignes droites. On peut même faire abstraction de l'espace ambiant (sur notre exemple, l'espace euclidien de dimension 3) et considérer que la surface (ou plus généralement la variété) porte de manière intrinsèque une donnée (sa métrique) qui définit les distances entre deux de ses points. Le mathématicien étudie alors en toute généralité les variétés munies de métriques, et en particulier celles à courbure constante (ce sont celles sur lesquelles les figures peuvent être déplacées en conservant les longueurs, tout comme on déplace un triangle dans le plan, par exemple par translation).

On peut donc interpréter la crise des GNE comme une crise de l'espace qui aboutit à une séparation entre les espaces physique et mathématique, ce dernier se constituant en rupture avec l'intuition sensible (« j'ai découvert un nouveau monde », s'exclame Bolyai). L'espace mathématique peut

3 La postérité a abandonné la distinction classique entre axiomes et postulats. Nous utiliserons donc le terme axiome, sauf quand il s'agira de mentionner les énoncés d'Euclide, auquel cas on parlera par exemple du 5ème postulat.

revêtir *a priori* toutes les formes que prévoit la théorie, à la différence de l'espace physique dont nos représentations sont soumises à l'expérience.

Le fait que certains espaces mathématiques non-euclidiens servent finalement pour décrire l'espace physique à l'échelle du cosmos demeure mystérieux : c'est le problème de « l'extraordinaire efficacité » des mathématiques (voir le point 7 ci-dessous).

Pour aller plus loin :
- Lachièze-Rey, M. (ed.) (2006). *L'espace physique entre mathématiques et philosophie*. Paris : EDP Sciences.
- Petit, J.-P. (1985). *Le géométricon. C*ollection Les Aventures d'Anselme Lanturlu, Paris : Belin.

3. Un obstacle ontologique et épistémologique à dépasser

Pourquoi les GNE ont-elles mis tant de temps à être acceptées ?

La géométrie, de ses origines jusqu'aux GNE, ne peut être détachée de son rapport avec le monde sensible. En effet, la géométrie d'Euclide est une modélisation de l'espace sensible et Hilbert soulignera également, plus tard, que les axiomes qu'il propose pour la géométrie proviennent de l'analyse de notre intuition spatiale. Le $5^{ème}$ postulat d'Euclide est ainsi appréhendé comme un énoncé relatif au monde physique avant d'être pensé dans son rôle logique uniquement. De ce fait, les GNE se heurtent à la conception selon laquelle la géométrie doit rendre compte du réel (l'espace physique). C'est un obstacle ontologique à leur émergence (Saccheri, par exemple, récuse les énoncés non euclidiens qu'il obtient sous le motif que « cela répugne à la nature de la ligne droite ») et à leur reconnaissance en tant que véritables théories mathématiques (on parle de « géométries imaginaires » et ces dernières ne suscitent pas un grand intérêt).

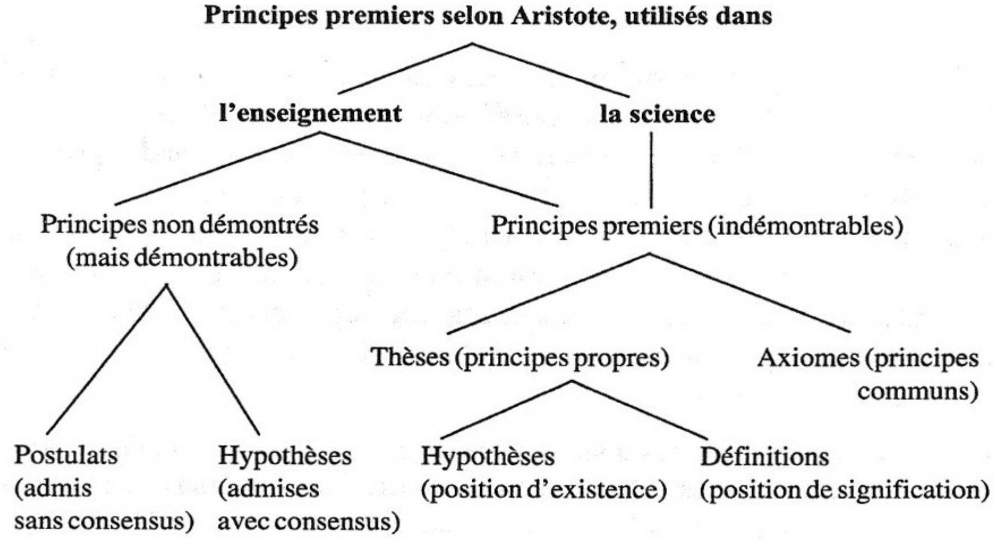
Si l'on analyse les objections qui sont faites aux GNE, on se rend compte de la présence d'un second obstacle : lorsque l'on dit qu'il est contraire au bon sens d'admettre que par un point on puisse mener plus d'une parallèle à une droite donnée, il n'y a en fait, dans l'espace sensible, ni point ni droite. La géométrie euclidienne est une modélisation de l'espace sensible, pas l'espace sensible lui-même. L'univers que le bon sens veut opposer aux espaces non euclidiens est en fait le schéma géométrique d'Euclide. De ce point de vue, le conflit n'est pas entre notre intuition et une théorie douteuse, mais plutôt entre un premier schéma dont nous avons pris l'habitude et un schéma dont la nouveauté surprend l'esprit. En d'autres termes, les GNE s'opposent à une connaissance antérieure hégémonique. La géométrie euclidienne constitue donc un « obstacle épistémologique » au sens de Bachelard[4].

Pour aller plus loin :
- Cf. la ressource « Quelques repères historiques et épistémologiques sur les géométries non euclidiennes ».
- Bachelard, G. (2000, [1938]). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris : Vrin.

4 C'est-à-dire un obstacle qui est inhérent à l'acte de connaître, un obstacle qui provient de la démarche de l'esprit : ce dernier met en place des représentations qui paraissent évidentes ou à certains moments s'avèrent utiles mais qui peuvent bloquer le développement des connaissances. L'esprit doit alors lutter contre lui-même pour remettre en question la connaissance antérieure. Exemples d'obstacles épistémologiques identifiés par Bachelard dans *La formation de l'esprit scientifique* : l'expérience première, la généralisation, l'utilisation des images, la substantialisation.

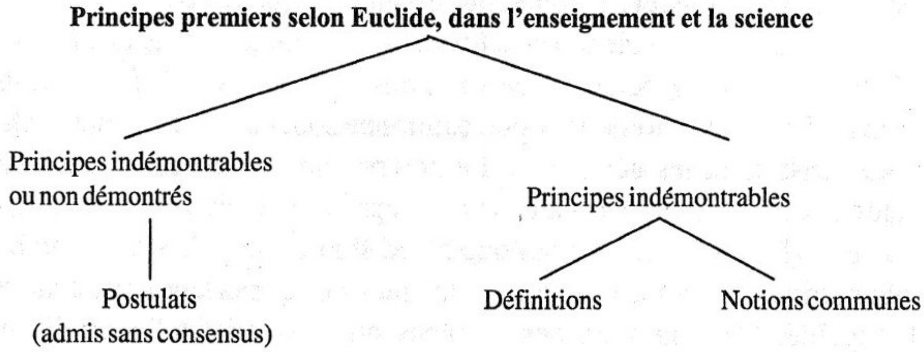
4. Le concept d'axiome

Aristote distingue dans son Organon :



Les axiomes sont des principes communs à toutes les sciences ; ils sont connus par intuition, s'imposent à l'esprit.

Les notions communes d'Euclide correspondent en gros aux axiomes d'Aristote (Proclus, un commentateur d'Euclide, les appelle d'ailleurs axiomes) et les postulats aux hypothèses. Cependant, ces notions ne coïncident pas tout à fait deux à deux :



Ainsi, il est possible de discuter le caractère non-démontrable (non premier) d'un postulat : c'est justement ce qui se produisit à propos du 5ème postulat.
La postérité[5] ne retiendra que le terme axiome, qui d'ailleurs ne traduit plus la conception d'Aristote. Les GNE ne sont pas étrangères à cette évolution : on s'est rendu compte que les axiomes ne peuvent être fondés sur l'intuition.

Quel statut donner aux axiomes ? Les définitions des objets devenant nominalistes[6] (donnons-nous

5 Nous parlons ici de la "postérité mathématique" et nous nous intéressons exclusivement au questionnement mathématique sur les axiomes. Nous ne discuterons donc pas la question des fondements philosophiques des mathématiques (par exemple, leur inscription dans une métaphysique qui assurerait la vérité des axiomes).

6 donc réduites à des définitions de noms : elles ne visent plus à dire la « nature des objets » (définitions ontologiques, qui disent l'être), elles n'établissent plus des correspondances avec des références extérieures ou précédemment

trois systèmes de choses, dit Hilbert (1862-1943), et désignons-les par des lettres), ce sont les relations entre les objets qui définissent ces objets. Or ces dernières sont exprimées au sein des axiomes, c'est pourquoi certains diront que les axiomes ne sont que des définitions déguisées. Dans ce type de situation, on ne peut plus séparer définitions et axiomes : on parle de définitions par axiomes, un système axiomatique possède des termes primitifs qui apparaissent comme autant d'inconnues (ici les points, droites et plans) reliées par des relations (d'appartenance, d'ordre, de congruences,...), comme dans un système d'équations.

Parmi tous les systèmes possibles, pourquoi choisissons-nous un système d'axiomes plutôt qu'un autre ? Par convention, nous dit Poincaré (1854-1912). Et qu'est-ce qui dicte nos conventions lorsque la logique ne permet pas de trancher (tous les systèmes étant cohérents) ? La simplicité des équations (critère interne aux mathématiques) ou, dans le cas de la géométrie, sa commodité à décrire le monde qui nous entoure, à petite distance pour la géométrie euclidienne (visée applicative des mathématiques).

> *« Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements esthétiques* a priori, *ni des faits expérimentaux.*
> Ce sont des *conventions* ; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est *guidé* par des faits expérimentaux ; mais il reste *libre* et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester *rigoureusement* vrais quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives.
> En d'autres termes, *les axiomes de la géométrie* (je ne parle pas de ceux de l'arithmétique) *ne sont que des définitions déguisées*.
> Dès lors, que doit-on penser de cette question : La géométrie euclidienne est-elle vraie ?
> Elle n'a aucun sens.
> Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus commode.
> Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode :
> 1° Parce qu'elle est la plus simple ; et elle n'est pas telle seulement par suite de nos habitudes d'esprit ou de je ne sais quelle intuition directe que nous aurions de l'espace euclidien ; elle est la plus simple en soi de même qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré ; les formules de la trigonométrie sphérique sont plus compliquées que celles de la trigonométrie rectiligne, et elles paraîtraient encore telles à un analyste qui en ignorerait la signification géométrique.
> 2° Parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil et avec lesquels nous faisons nos instruments de mesure. » (Poincaré 2004, p. 75-76)

D'autres critères de choix interviennent également : la fertilité des systèmes d'axiomes, des considérations esthétiques, des considérations fondationnelles (on recherche les notions les plus primitives, on choisira pour cela la théorie des ensembles).

Pour aller plus loin :

- Blanché, R. (2009). *L'axiomatique*. Paris :PUF.
- Boniface, J. (2004). *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*. Paris : Vrin.
- Poincaré, H. (2004 [1902]). *La science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion.

établies, elles ne font qu'introduire des signes qui ne recevront leur signification qu'ultérieurement, par le biais des axiomes et à travers les diverses propriétés que l'on pourra démontrer à propos de ces signes

5. **Une nouvelle conception de l'existence et de la vérité en mathématiques**

Dans la conception classique, les objets mathématiques sont définis par référence à des éléments posés au préalable ou ultimement (pour les notions les plus primitives) par référence à des éléments du réel. Une définition confère un sens à un mot ou signe nouveau et un seul, les autres mots et symboles entrant dans la définition ayant été préalablement définis. Viennent ensuite des propositions destinées à assurer l'existence de ces objets : ces dernières nécessitent d'exhiber les objets ou de les construire. Enfin, notons que les axiomes et les théorèmes sont des propositions non définitionnelles : ils ne doivent contenir aucun mot ou signe non défini.

Hilbert (1862-1943) bouscule cette conception classique en publiant ses *Fondements de la Géométrie* (1899). Les GNE sont une des motivations à l'écriture de ce traité : « Je voulais donner la possibilité de comprendre les propositions que je tiens pour les résultats majeurs de la recherche en géométrie : que l'axiome des parallèles ne découle pas des autres, qu'il en va de même pour l'axiome d'Archimède, etc. […] Avant tout, je voulais créer la possibilité de comprendre et de résoudre des questions du type suivant : pourquoi la somme des angles d'un triangle est-elle égale à deux angles droits et quel est le rapport entre ce fait et l'axiome des parallèles » explique Hilbert en réponse à Frege[7].

Hilbert adopte un point de vue abstrait sur la géométrie. Nous avons vu au paragraphe précédent que ses définitions par axiomes brisent la séparation entre définitions et propositions non définitionnelles. Ces définitions impliquent des systèmes d'axiomes qui confèrent simultanément un sens à plusieurs symboles nouveaux (des symboles d'objets et de relations entre objets) à travers les propriétés qui en fondent l'usage. Il n'y a plus de références extérieures, mais au contraire un système formel assez complexe dont il s'agit de vérifier la cohérence : les différents axiomes sont-ils « compatibles » au sens où aucune contradiction ne pourra jamais en être déduite ?

Le mathématicien distingue deux types de preuves d'existence : les preuves constructives où l'on construit l'objet et les preuves d' « existence pure » qui passent généralement par un raisonnement par l'absurde : la non-existence implique une contradiction, donc l'objet existe. Des preuves d'existence du premier type sont davantage satisfaisantes (voir également le point 9) mais pas toujours disponibles.

A l'issue de son travail d'axiomatisation de la géométrie euclidienne, Hilbert définit explicitement l'*existence mathématique*[8] comme *non-contradiction* : un objet mathématique existe si et seulement si le système d'axiomes qui le définit est non-contradictoire (au sein de la théorie dans laquelle on se place). C'est en quelque sorte le ressort de la preuve d'existence pure qui est érigé en principe : « non-existence implique contradiction » est équivalent par contraposée[9] à « non-contradiction implique existence ».

Cette nouvelle conception de l'existence mathématique traduit une nouvelle conception de l'objet mathématique : ce dernier n'est plus conçu sur le modèle des objets de la nature, la notion d'existence de tels objets est désormais réduit à un simple critère logique.

La question de la vérité d'une théorie mathématique est également ramenée au critère logique de non-contradiction : la géométrie n'est plus conçue comme une science appliquée qui modélise le réel (donc une science dont les énoncés reflètent des vérités matérielles) mais comme une science pure qui n'est contrainte que par la cohérence interne et formelle de ses principes, c'est-à-dire leur non-contradiction. Les géométries non-euclidiennes peuvent ainsi prendre place à côté de la géométrie euclidienne : les trois géométries ont le même statut logique, la cohérence de l'une est

7 Correspondance Frege/Hilbert (1900). Introduction et traduction J. Dubucs, *Logique et fondements des mathématiques*, Paris : Payot, p. 215-235.

8 Il s'agit donc d'existence formelle, c'est à dire à proprement parler, de pure possibilité.

9 Pour des éclairages sur la logique classique et notamment l'implication, le lecteur pourra consulter le satellite « L'implication en logique classique », voir http://www.irem.univ-montp2.fr/Satellite-L-implication-en-logique

équivalente à la cohérence des autres.

Pour aller plus loin :

- Blanché, R. (2009). *L'axiomatique*. Paris : PUF.
- Boniface, J. (2004). *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*. Paris : Vrin.

6. Le rôle de l'expérience

Avec l'avènement des GNE, les scientifiques ont pris conscience qu'il existe plusieurs géométries possibles, c'est-à-dire plusieurs systèmes mathématiques possibles (tous cohérents du point de vue logique), pour modéliser l'espace physique. Laquelle de ces géométries décrit adéquatement l'espace physique ? C'est une question qui ne peut être tranchée *a priori*, en comparant ces géométries simplement sur le plan mathématique. L'expérience, on l'imagine, à un rôle à jouer ici. Toutefois, le rapport entre la théorie et l'expérience n'est pas aussi simple que les fondateurs des GNE l'on d'abord pensé.

Au XIX^ème^ siècle, Gauss, Lobatchevski ou encore Riemann pensaient qu'il était possible d'établir directement par l'expérience les propriétés de l'espace physique et de déterminer ainsi si ce dernier était euclidien ou non. Ils ont par exemple cherché à mesurer la somme des angles d'un triangle à grande échelle (avec les sommets de trois montagnes ou avec des étoiles) pour voir si l'on trouvait une valeur égale ou non à 180°, ce qui confirmerait ou réfuterait la description euclidienne de l'espace physique.

Cette idée selon laquelle l'expérience permettrait de trancher directement quelle géométrie décrit adéquatement l'espace physique a été remise en cause par Poincaré dans la dernière partie du XIX^ème^ siècle. Son objection est la suivante. Nous ne pouvons pas observer directement l'espace lui-même et ses propriétés, mais uniquement des corps matériels (ou des rayons lumineux) qui entretiennent entre eux certaines relations que nous qualifions de « spatiales ». Par conséquent, l'expérience ne permet pas de confronter directement les géométries aux données empiriques. Ce qui est confronté aux données empiriques, ce sont conjointement des hypothèses sur l'espace physique (une certaine géométrie) et certaines hypothèses sur les corps matériels ou sur la lumière.

Cette objection de Poincaré conduit à l'idée de la « sous-détermination de la théorie par l'expérience ». Eu égard à un ensemble de données empiriques, plusieurs systèmes théoriques sont tenables, tandis que d'autres sont exclus. L'expérience permet ainsi d'écarter tout un champ de possibles au niveau théorique, mais ne nous dit pas lequel, parmi les systèmes théoriques qui restent tenables, décrit adéquatement la réalité. Dans le cas de la géométrie et de l'espace physique, cette idée peut se traduire de la manière suivante. On peut par exemple imaginer que certaines données empiriques portant sur l'espace physique excluent l'ensemble théorique {géométrie euclidienne + théorie A sur les corps matériels}, mais ne permettent pas de trancher entre les deux ensembles théoriques également tenables que sont {géométrie euclidienne + théorie B sur les corps matériels} et {géométrie riemannienne + théorie A sur les corps matériels}.

En raison de la sous-détermination de la théorie par l'expérience, les épistémologues « anti-réalistes » (par exemple, Bas van Fraassen) estiment que rien ne nous permet d'affirmer que les théories en accord avec l'expérience et admises par les scientifiques sont vraies, au sens où elles offriraient une description adéquate de la réalité.

Pour aller plus loin :

- Cf. la ressource « Géométrie et espace physique chez Poincaré : aux sources du conventionnalisme ».
- Poincaré, H. (2009 [1902]). *La science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion.
- Jammer, M. (2008 [1993]). *Concepts d'espace : une histoire des théories de l'espace en physique*. Paris : Vrin.
- Sklar, L. (1976). *Space, time and spacetime*. Berkeley: University of California Press.

7. Les géométries non-euclidiennes dans le cadre des théories de la relativité restreinte et générale

Dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte (Einstein, 1905), l'espace et le temps sont liés et représentés par une géométrie « pseudo-euclidienne » à quatre dimensions, c'est-à-dire une géométrie de courbure nulle (en cela, elle se rapproche de la géométrie euclidienne), mais telle que la composante temporelle de la métrique[10] est négative (en cela, elle n'est que « *pseudo*-euclidienne »).

Dans le cadre de la théorie de la relativité générale (Einstein, 1915-1917), la géométrie décrivant l'espace-temps est dépendante de la distribution de la masse-énergie. En effet, cette dernière y est reliée à une courbure de l'espace-temps. Localement, au voisinage d'une inhomogénéité du contenu (masse-énergie), la géométrie décrivant l'espace-temps n'est donc plus euclidienne. Si de plus il y a déplacement du contenu, la géométrie est variable[11].

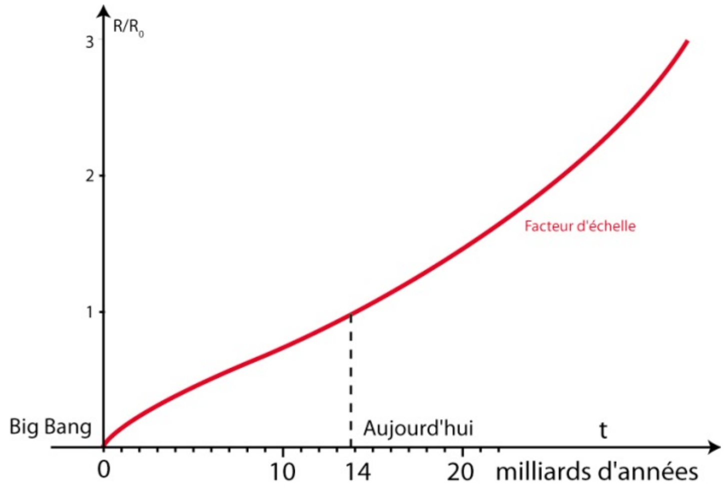
Supposons maintenant que la masse-énergie soit répartie à chaque instant de façon uniforme dans l'espace. Dans ce cas, les solutions des équations de la théorie de la relativité générale nous indiquent que l'espace n'est pas statique, c'est-à-dire qu'il est soit en expansion, soit en contraction. Ce sont les observations qui depuis 1927 nous montrent que l'espace est en expansion. Il s'agit ici d'une expansion de l'espace et non du contenu qui se déplacerait dans l'espace. Cette expansion de l'espace est représentée par un facteur d'échelle R(t).

Développons plus précisément ce dernier point. Il est possible que la masse-énergie soit à chaque instant répartie de façon uniforme (homogène et isotrope). C'est le « principe cosmologique » qui semble en accord avec l'Univers observé : au-delà de la dimension des super-amas de galaxies ($\sim 10^8$ a-l), la distribution de masse-énergie du cosmos apparaît effectivement comme étant uniforme (c'est-à-dire homogène et isotrope). Cette uniformité spatiale du contenu implique l'uniformité spatiale de son contenant. La partie spatiale (3D) de la géométrie a donc la même courbure en tout point à un instant donné : partout positive, partout nulle ou partout négative. L'espace 3D est alors respectivement S3, E3 ou H3. Dans le cas E3 (compatible avec les observations disponibles en 2012), la partie spatiale est euclidienne (sans courbure) mais, comme dans les deux autres possibilités, elle est non statique : son facteur d'échelle R(t) varie avec le temps. Mais cette variabilité n'est valable qu'aux distances où le contenu est uniforme : l'espace de la Terre, du système solaire et de notre galaxie n'est pas en expansion et quant aux plus grandes structures observées, les superamas de galaxies, elles sont en expansion mais un peu plus faible que l'Univers à plus grande échelle. La géométrie spatio-temporelle, irrégulière à faible distance, se raccorde progressivement, à grande distance, à une géométrie cosmique régulière, à courbure spatiale constante (éventuellement nulle) et à facteur d'échelle spatialement uniforme (mais variable avec le

10 C'est-à-dire de la donnée mathématique qui définit la géométrie : les distances, les angles, la courbure, etc.

11 C'est-à-dire : les paramètres de la géométrie sont variables. La déformation se propage à la vitesse c par le biais d'ondes « gravitationnelles ».

temps). La fonction R(t), où t est un temps cosmique qui (loin des fortes inhomogénéités) est le même pour tous les observateurs au repos (les observations montrent que les astres ont des vitesses v très faibles par rapport au cosmos : pour le soleil $v/c \sim 10^{-3}$ puisque v = 370 km/s), est représentée ci-dessous selon le modèle « concordance » (déduit des observations depuis 1998).



Expansion de l'espace en fonction du temps (modèle « concordance »)

Pour aller plus loin :

- Cf. la ressource « Concept de géométrie non-euclidienne en physique : la relativité générale et la cosmologie ».
- Sklar, L. (1976). *Space, time and spacetime*. Berkeley: University of California Press.

8. Les mathématiques, une science formelle

Les GNE permirent aux mathématiques d'acquérir un statut de libres créations de l'esprit, indépendamment de la réalité extérieure dont elles ne sont plus des abstractions directes et dont elles ne sont plus obligées de rendre compte. Depuis les GNE, on constate un mouvement vers des degrés d'abstraction de plus en plus élevés et un penchant vers des axiomatiques de plus en plus formelles. Ces dernières usent du langage symbolique afin d'éviter toute erreur éventuelle qui serait causée par une intuition trompeuse tout en permettant l'application du calcul algébrique.

Face à ce devenir, certains reprocheront aux mathématiques de n'être plus qu'un jeu de l'esprit sur des symboles vides de sens. Paradoxalement, c'est le fait de vider les objets mathématiques de toute signification concrète (en référence à des objets particuliers) qui permet aux mathématiques d'exprimer pleinement leur fertilité.

Comme l'exprime le collectif Bourbaki dans son manifeste *L'architecture des Mathématiques :*

> « Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de *formes* abstraites - les structures mathématiques ; et il se trouve - sans qu'on sache bien pourquoi - que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de pré-adaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé ; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues

susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles, et de remplir leur rôle élaborateur. »

Bourbaki fait référence au caractère unificateur (différentes classes d'exemples sont unifiées sous un même concept, différents résultats sont unifiés sous une même théorie et les mathématiques gagnent ainsi en unité, reliant entre eux des résultats précédemment séparés), généralisateur (les situations et résultats particuliers trouvent leurs raisons dans des principes généraux, précisément le fait que les objets étudiés vérifient les axiomes d'une structure abstraite et générale donnée) et simplificateur (en dégageant des propriétés structurales, le mathématicien réussit à trouver des angles d'attaque à un problème dont l'abord est complexe) des structures mathématiques, avec l'économie de pensée qui en découle (une même théorie s'applique à de nombreuses situations).

Pour aller plus loin :

- Bourbaki, N. (1998 [1948]). *L'architecture des mathématiques : La Mathématique, ou les Mathématiques ?* Dans F. Le Lionnais (ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris : Hermann (Collection Histoire de la Pensée).

9. Les GNE et la crise des fondements en mathématiques

Les GNE ont déstabilisé l'édifice mathématique (chute de l'empire euclidien) et provoqué une méfiance vis à vis de l'intuition qui se propage de la géométrie à l'analyse : contrairement à l'intuition, il n'est pas vrai qu'à une courbe continue on puisse toujours mener une tangente (Weierstrass), il n'est pas faux qu'une courbe, une ligne sans largeur, puisse couvrir toute la surface d'un carré (Peano). Ces paradoxes et ceux à propos de l'infini conduisirent les mathématiciens à questionner les critères de légitimité tant des prémisses d'une théorie mathématique (les axiomes) que des preuves acceptées à l'intérieur de ces théories. Les historiens parlent ainsi de la « crise des fondements » qui secoua les mathématiques entre la fin du XIX^{ème} siècle et le début du XX^{ème}.

Cette réflexion a conduit Peano et Dedekind à proposer des axiomatiques destinées à fonder l'arithmétique, à la suite des travaux du logicien Frege qui s'appuie sur une analyse logique du langage pour essayer de répondre à la question « qu'est-ce qu'un nombre entier ? ».

D'une façon générale, on distingue habituellement trois approches différentes, trois philosophies, en réponse à cette crise des fondements :

- le *logicisme*, inauguré par Frege et poursuivi par Russell et Whitehead, qui vise à reconstruire les mathématiques sur la logique. Il s'agit alors de formaliser la logique en s'efforçant de la réduire à des règles de calcul, et par voie de conséquence, la mathématique toute entière. Pour s'en faire une idée (passage extrait de Davis et Hersh, l'Univers mathématique) :

Russell et Whitehead ont été les pionniers dans un programme pour réduire les mathématiques à la logique. Ici, au bout de 362 pages, se trouve établie la proposition d'arithmétique $1 + 1 = 2$.

$*54{\cdot}42.\ \vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha .\ !\beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}4 .\ \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

$[*24{\cdot}53{\cdot}56 . *51{\cdot}161] \quad \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha \quad (1)$

$\vdash . *54{\cdot}25 . \text{Transp} . *52{\cdot}22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`x . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`y :$

$[*13{\cdot}12] \ \supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota`x . \alpha \neq \iota`y \quad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y :$

$[*51{\cdot}235] \quad \equiv : (\exists z) \cdot z \in \alpha . \beta = \iota`z :$

$[*37{\cdot}6] \quad \equiv : \beta \in \iota``\alpha \quad (3)$

$\vdash . (3) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . *54{\cdot}101 . \supset \vdash . \text{Prop}$

$*54{\cdot}43.\ \vdash :. \alpha , \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \quad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \quad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x , y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

Il découlera de ces propositions, lorsque l'addition arithmétique aura été définie, que $1 + 1 = 2$.

Il est indéniable que les démonstrations mathématiques peuvent être entièrement traduites sous forme de calculs mais cela ne saurait résumer l'activité mathématique, les efforts du mathématicien qui isole, forge ses concepts et les déploie.

- L'*intuitionisme* de Brouwer et Poincaré, affirmant que la mathématique ne peut faire confiance qu'à des procédés finitaires (qui mettent en jeu un nombre fini d'étapes) et constructifs (qui ne font pas appel à des théorèmes d'existence abstraits mais au contraire construisent les objets). Les intuitionnistes refusent le principe du tiers exclu (donc également le raisonnement par l'absurde) et l'axiome du choix (qui implique le premier) qui sont des principes non constructifs. En logique intuitionniste, $\tilde{\exists} x\ P(x)$ signifie qu'il existe un procédé régulier, c'est-à-dire un algorithme qui au bout d'un nombre fini d'étapes permet de construire un élément vérifiant la propriété. Sont définis de même des connecteurs $\tilde{\neg}$ $\tilde{\Rightarrow}$ (négation et implication intuitionnistes). Hilbert objecte que « cela revient à démembrer et mutiler notre science ; si nous suivions de tels réformateurs, nous courrions le danger de perdre un grand nombre de nos trésors les plus précieux ». A l'inverse, les idées intuitionnistes ont également donné naissance à de nombreux travaux en analyse constructive ou autour de la notion de calculabilité (correspondance de Curry-Howard).
- l'*approche formaliste*, annoncée par les travaux de Dedekind et Peano, puis mise sous forme d'un programme par Hilbert dans les années 1920. Certains disent de façon caricaturale que l'ambition des formalistes est de réduire les mathématiques à un pur jeu formel. Or pour Hilbert « la détermination des axiomes de la géométrie et l'étude de leur interdépendance [...] se ramène à l'analyse logique de notre intuition spatiale », comme il l'énonce lui-même dans l'introduction de ses Fondements de la Géométrie. Le formalisme est ainsi davantage une forme de présentation, une modalité d'objectivisation d'idées profondes, concernant une réalité extérieure que le mathématicien vise par ses efforts à interroger et à comprendre.

Les GNE constituent donc, d'un certain point de vue, l'élément déclencheur d'un questionnement de nature philosophique mené par les mathématiciens sur leur propre activité, questionnement plutôt circonscrit à une époque, les questions de fondements se situant loin des préoccupations de la grande majorité des mathématiciens contemporains et actuels.

Pour aller plus loin :

- Cavailles, J. (1938). *Méthode axiomatique et formalisme : essai sur le problème du fondement des mathématiques*. Paris : Hermann.
- Davis, P. J. & Hersh, R. (1986). *L'univers mathématique*. Paris : Dunod.
- Gonseth, F. (1926). *Les fondements des mathématiques : de la géométrie d'Euclide à la Relativité générale et à l'Intuitionisme*. Paris : Blanchard.
- Mancosu, P. (1998). *From Brouwer to Hilbert : the debate on the foundations of mathematics in the 1920s*. New York : Oxford University Press.
- Patras, F. (2001). *La pensée mathémathique comptemporaine*. Paris : PUF.
- Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics*. Oxford : Oxford University Press.

10. Les GNE viennent enrichir la théorie mathématique

Le théorème de classification des géométries (en dimension 2) peut s'énoncer comme suit :

Théorème. *Soit (X, d) un espace métrique ayant les propriétés suivantes :*
- *(X, d) est une surface (i.e. tout point de X admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$) ;*
- *(X, d) est 2-homogène (i.e. si $d(x, y) = d(x', y')$, il existe une isométrie qui envoie x sur x' et y sur y') ;*
- *(X, d) est un espace géodésique (i.e. pour tout couple de points (x, y), il existe une courbe $\gamma : [0, l] \longrightarrow X$ telle $\gamma(0) = x$ et $\gamma(l) = y$ et qui est une isométrie sur son image - de sorte que $d(x, y) = l$).*

Alors, (X, d) est isométrique à l'un des trois exemples suivants :
- *le plan euclidien ;*
- *une sphère ou le quotient d'une sphère dans lequel on identifie les paires de points antipodaux (espace elliptique de Klein) ;*
- *le disque de Klein-Beltrami.*

Bien entendu, ceci est une version moderne (ce n'est pas ainsi que l'on énonçait les choses à l'époque de Gauss, de Lobatchevski et de Riemann). Il a fallu abstraire l'idée d'espace métrique, élucider le concept de surface pour arriver à un tel énoncé. Mais quand on dit qu'il existe trois sortes de géométries dans le plan, c'est précisément à un tel théorème de classification des surfaces que l'on fait référence.

Pour aller plus loin :

- Cf. la ressource « Géométries non euclidiennes : petite introduction mathématique à l'usage des non mathématiciens ».

- Ghys, E. (2006). Poincaré et son disque. Dans E. Charpentier, E. Ghys & A. Lesne (eds.), *L'Héritage scientifique de Poincaré* (pp. 27-57). Paris : Belin.